Bundesrealgymnasium GRAZ Keplerstraße

Physik der E-Gitarre



Fachbereichsarbeit aus **Physik**

von Lukas von Berg

8c

2008/2009

Abstract

In this specialized paper, some of the physical fundamentals of the electric guitar are described. The vibration of the string is the most important phenomenon for the sound generation, which is determined by the wave equation. The wave equation is solved using a separation approach and the amplitude is described as a Fourier series. According to that, the tone consists of a basic keynote and higher harmonics. The acoustic signal is transferred to the pickup based on the law of induction depending on the velocity of the string. The pickup is represented by an equivalent circuit consisting of capacity, inductivity and ohmic resistance. These values are determined by measurements. Based on this, the transfer function of the wiring of the guitar is calculated using Kirchhoff's laws. This shows that the electronics has a significant influence on the sound of the guitar. This is due to the fact that the pickup can be understood as a second order low-pass filter which is characterized by a resonance frequency and a damping of higher harmonics. In the end, the solution of the wave equation is combined with the electric guitar. Based on that, the main effects influencing the sound of the guitar can be discussed.

Another chapter discusses the mechanics of the guitar. In this chapter, the forces acting on the guitar by the strings are calculated via the wave equation. From these tension forces, the bending of the neck of the guitar is calculated depending on material properties and profile of the neck. This results in a total force of about 450 N causing a bending of the neck ranging between 0.1 mm to a few millimeters.

A further chapter deals with the construction of a self-made electric guitar based on the findings of the mechanics and the electrics chapter. This guitar is equipped with a special cutout that allows changing the position of the pickups. Furthermore, a capacity selection switch is added to the electric circuit. This allows modifying the sound of the guitar based on the shift of the resonance frequency.

The main effects influencing the sound have been found as

- Picking position
- Pickup position and width
- Resonance frequency

Finally using digital recording technology audio files are created. These are analyzed with a Fast Fourier Transformation and are compared with the calculated amplitude spectra. Within this comparison the picking position on the string is varied showing a reduction of higher harmonics with increasing picking position. The same is detected for the pickup location. The same trends and even very similar quantitative data for the amplitude heights can be observed in the calculations and in the measurements. Thus the results show a good agreement between predicted values and the recorded audio data.

Vorwort

Ich habe schon recht früh angefangen klassische Gitarre zu spielen, aber nach einiger Zeit wurde der Wunsch nach einer elektrisch verstärkten Gitarre immer größer. Nach einigen Jahren begann ich dann auch, in einer Band zu spielen, wodurch natürlich die Ansprüche größer wurden und ich mich noch intensiver mit E-Gitarren beschäftigt habe.

Bei der Suche nach einer neuen Gitarre kam ich auf die Idee, eine eigene E-Gitarre zu entwerfen und zu bauen. Nach einiger Recherchearbeit fand ich dann auch einige Bücher, die dieses Thema behandeln. Da mich außerdem die grundlegenden Funktionen der E-Gitarre sehr interessierten, war es naheliegend, das ganze Projekt ein wenig umfassender zu gestalten und es in einer Fachbereichsarbeit zu behandeln.

Ich bin froh, dass ich es gewagt habe, eine Fachbereichsarbeit zu schreiben, da man dadurch die Möglichkeit hat, ein Thema, das einen persönlich interessiert umfassend und gründlich zu untersuchen. Außerdem habe ich gelernt, dass man mit ein wenig erweiterten physikalischen und mathematischen Kenntnissen schon recht viel erreichen kann und zum Beispiel die am Anfang recht kompliziert erscheinende Akustik, Mechanik und Elektrik der E-Gitarre gut verstehen kann.

Ganz besonders möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die den Bau der E-Gitarre finanziert haben und mich außerdem oft moralisch unterstützt haben. Großer Dank gilt vor allem meinem Papo, der mich während der ganzen Arbeit in beinahe jedem Bereich unterstützt hat und mich in Zeiten der Arbeitsunwilligkeit motiviert hat. Auch meinen Geschwistern, vor allem meinem kleinen Bruder Benjamin, möchte ich hier meinen Dank aussprechen, da auch diese mir des öfteren zur Hand gegangen sind, wenn Hilfe notwendig war.

Außerdem möchte ich mich bei Mag. Traute Bintritsch bedanken, die sich bereit erklärt hat, meine FBA zu betreuen. Auch Mag. Helmut Ploier, der mich in Fragen zur formellen Gestaltung der FBA unterstützt hat, möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

Ein letzter, eher symbolischer Dank geht zurück in die Vergangenheit an Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), der mit seiner Idee der Darstellung periodischer Funktionen durch eine Reihe von Sinus- und Cosinusfunktionen die Grundlage für die das Verständnis des Klangs der Musikinstrumente gelegt hat.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	. 4
2 Geschichte der E-Gitarre	. 5
3 Akustik 1	10
3.1 Herleitung der Wellengleichung1	10
3.2 Lösung der Wellengleichung1	11
Randbedingungen1	12
Anfangsbedingungen1	14
3.3 Diskussion der Lösung	15
3.4 Schwingung der Saite am Tonabnehmer2	20
4 Elektronik	23
4.1 Aufbau des Tonabnehmers 2	23
4.2 Ersatzschaltbild eines Tonabnehmers	24
4.3 Vermessung der Tonabnehmer2	26
4.4 Übertragungsverhalten des Tonabnehmers3	32
4.5 Effekte externer Beschaltung auf die Übertragungsfunktion	35
4.6 Einfluss der Kabelkapazität	38
4.7 Gesamt-Übertragungsfunktion vom Tonabnehmer zum Verstärkereingang	40
4.8 Ausgangssignal der Gitarre und Frequenzspektren am Verstärkereingang4	44
5 Mechanik 4	49
5.1 Berechnung der Saitenspannung 4	49
5.2 Durchbiegung des Halses5	51
5.3 Numerische Berechnung der Biegelinie bei elliptischem Querschnitt mit Verdickung5	56
6 Bau einer E-Gitarre	60
6.1 Detailierte Beschreibung des Gitarrenbaus6	60
6.2 Berechnung der Bundpositionen6	64
7 Messung der Klangspektren und Vergleich mit der Theorie7	70
7.1 Die Diskrete Fourier Transformation (DFT)7	70
7.2 Vorgangsweise bei der Messung7	71
7.3 Vergleichsmessungen und Auswertung	74
8 Zusammenfassung und Schlussfolgerungen 8	81
9 Anhang: Verwendete Octave-Programme	82
10 Literatur	89

1 Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die physikalischen Grundlagen für die Funktionsweise der E-Gitarre darzustellen. Mit den gewonnenen Erkenntnissen wurde dann eine eigene E-Gitarre gebaut, die dazu verwendet wurde, die durchgeführten Berechnungen experimentell zu überprüfen.

Im Einzelnen wollte ich verstehen, wie der Klang der Gitarre zustande kommt, um ihn bei einer selbst zu bauenden Gitarre gezielt beeinflussen zu können. Dazu mussten die folgenden Punkte genauer untersucht werden:

- Saitenschwingung abhängig vom Anschlagen der Saite
- Kräfte, die auf die Gitarre wirken
- Signalaufnahme am Tonabnehmer
- Übertragungsverhalten des Tonabnehmers
- Wirkung der nachgeschalteten Klang- und Lautstärkeregler
- Einflüsse von Kabel und Verstärker

Für die Bearbeitung der Fragestellungen der Arbeit waren folgende Arbeitsmethoden wichtig:

- Lösung der Wellengleichung mit Separationsansatz und Darstellung als Fourier-Reihe
- Berechnen der elektrischen Beschaltung mit den Kirchhoffschen Gesetzen und komplexer Wechselstromrechnung
- Vermessung der Tonabnehmer mit Oszilloskop und Sinusgenerator
- Spektralanalyse der Audiodateien mit diskreter Fourier-Transformation

Um die Bearbeitung des Themas zu erleichtern wurden folgende Vereinfachungen gemacht:

- Lösung der ungedämpften Wellengleichung
- Berücksichtigung der Dämpfung durch einen Korrekturfaktor
- Keine Verwendung von aktiven Bauelementen in der Beschaltung

Die Arbeit ist in fünf Hauptkapitel gegliedert. Die Kapitel 3, 4 und 5 setzten sich mit den theoretischen Grundlagen aus Akustik, Elektronik und Mechanik der E-Gitarre auseinander. Im sechsten Kapitel wird der Bau der E-Gitarre dokumentiert und im letzen Kapitel werden die Berechnungen mit den Messungen von Ausgangssignalen der Gitarre verglichen und bewertet.

2 Geschichte der E-Gitarre

Die Anfänge der E-Gitarre liegen in den 20er Jahren, da die Gitarristen in den zu dieser Zeit sehr beliebten Jazz- und Unterhaltungsorchestern von den Bläsern und dem Schlagzeug übertönt wurden. Deshalb war die Gitarre damals höchstens als Begleitinstrument sinnvoll verwendbar. Die folgende Darstellung der Geschichte der E-Gitarre orientiert sich am Buch Elektrogitarren von H. Lemme [1], S.13 ff.

Als erstes begann die Firma Gibson, ein in den USA gegründetes Unternehmen, das schon lange davor Gitarren herstellte, mit Tonabnehmern zu experimentieren. Diese waren jedoch meistens sehr hochohmig und erzeugten starke Störgeräusche. Außerdem wurden Versuche mit Tonabnehmern nach dem Prinzip des Piezo-Kristalls gemacht, der die Schwingungen der Gitarrendecke aufnimmt. Aber auch mit dieser Technik schaffte man es mit den damaligen Mitteln nicht, einen Tonabnehmer zu bauen, der auch in der Praxis anwendbar war.

Erst durch die Überlegung, einen Tonabnehmer aus Magneten und Spulen zu entwickeln, der nur auf die Schwingung der Saite reagiert, kam man dem Ziel, die Gitarre elektrisch zu verstärken, wieder näher. Damals stellte man auch fest, dass man für diese Art von Gitarre keinen Resonanzkörper mehr braucht, der das Signal verstärkt. Deshalb wurden die ersten E-Gitarren aus Aluminium gefertigt, was sich aber nicht durchsetzen konnte. Diese Gitarren hatten außerdem noch keine Bünde, da sie von der bundlosen Hawaii-Gitarre abstammten.

1935 brachte Gibson eine der ersten normal bespielbaren E-Gitarren heraus, die vor allem bei Jazzgitarristen auf große Beliebtheit trafen. Diese Gitarren hatten jedoch den Korpus einer normalen Jazzgitarre mit Resonanzkörper. Dadurch wurde die Gitarre dank der zusätzlichen elektrischen Verstärkung erstmals als Soloinstrument einsetzbar.

Während des Zweiten Weltkriegs wurden kaum E-Gitarren produziert oder entwickelt, danach begannen aber auch in Europa sehr viele Firmen mit der Produktion.

Eine der wichtigsten Rollen in der Entwicklung der E-Gitarre spielte Les Paul, ein Profi-Gitarrist, der viel mit elektrischen Gitarren experimentierte. Er war der Erste, der festgestellt hat, dass die Position des Tonabnehmers auf der Gitarre einen starken Einfluss auf den Klang hat. Außerdem hatte er die Idee, zwei Tonabnehmer auf einer Gitarre zu montieren um den Klang dadurch zu beeinflussen. Les Paul war auch ein starker Befürworter von Solid-Body E-Gitarren (E-Gitarren ohne Resonanzkörper) und experimentierte sogar mit einer Eisenbahnschiene, auf der er die Saiten befestigte um ein möglichst langes Sustain (Nachklingen) zu erhalten.

Auch Leo Fender (s. Abb.1) war eine der wichtigen Personen, die in die Geschichte des Gitarrenbaus eingegangen sind. Er hat es mit der Fender Telecaster (s. Abb.2.a) geschafft, mit einer Solid-Body Gitarre den technischen und kommerziellen Durchbruch zu erlangen. Leo Fender begann mit einer kleinen Reperaturfirma für Elektrogeräte, in der er unter anderem auch Gitarren-Verstärker reparierte, und wurde so auch mit der Musikszene vertraut. Er selbst war kein besonders begabter Gitarrist, hatte jedoch ein sehr genaues Gehör und gute Kontakte zu vielen berühmten Musikern dieser Zeit. So konnte er genau auf die Vorstellungen und Wünsche der Gitarristen eingehen. Eines der größten Probleme der E-Gitarren von Gibson mit Resonanzkörper war, dass man bei hohen Lautstärken eine sehr starke Rückkopplung hatte. Daher entwickelte er eine Solid-Body Gitarre, die Fender Telecaster. Anfangs wurde diese Gitarre noch unter dem Namen Broadcaster produziert, aus Patentgründen musste Fender jedoch einen neuen Namen suchen. Bei der Entwicklung der Telecaster wurde besonders darauf geachtet, dass die Produktion möglichst einfach und günstig war. Auch heute noch ist dieses Modell eine der erfolgreichsten Gitarren auf dem Markt und wurde durchgehend produziert, ohne dass irgendwelche maßgeblichen Veränderungen vorgenommen wurden.



Abb.1: Leo Fender nach [2] und ein Faksimile seiner Patentanmeldung für den ersten Gitarrentonabnehmer aus dem Jahr 1948 [3]

1954 brachte Fender durch den Erfolg der ersten Solid-Body Gitarre angespornt die Fender Stratocaster heraus (s. Abb.2.b). Diese Gitarre wurde serienmäßig mit 3 Tonabnehmern fabriziert, was viele verschiedene Klangmöglichkeiten bietet. Ein weiterer Vorteil war, dass die Form des Gitarrenkorpus an den Körper angepasst wurde und sich die Gitarre daher sehr angenehm an den Körper anschmiegt. Vor allem in der Rock'n'Roll Welle, die etwa zu dieser Zeit begann, war der Sound der Stratocaster prägend. Jimi Hendrix und Eric Clapton, zwei der begnadetsten Gitarristen haben danach in den 60er und 70er Jahren beide eine Fender Stratocaster gespielt. Dieses Model ist die am häufigsten gespielte E-Gitarre und wurde außerdem von vielen Firmen nachgebaut.



Abb.2:a) Fender Telecaster nach [4]b) Fender Stratocaster nach [5]

Die Firma Fender produzierte nach diesen Erfolgen noch viele weitere neue Modelle oder ging auf spezielle Wünsche der Musiker ein. Die Stratocaster und die Telecaster sind aber bis heute die zwei wichtigsten Modelle der Firma. Auch heute noch zählt die Firma Fender zu den marktführenden Gitarrenherstellern.

Die Firma Gibson, die zuvor nur vollakustische E-Gitarren herstellte, merkte bald, dass auch sie dem neuen Trend folgen muss, und begann wie Fender, Solid-Body Gitarren herzustellen. Ihr erstes Modell wurde nach langer Forschung und vielen Experimenten herausgegeben und war von der Fertigung um einiges hochwertiger als die Fender E-Gitarren. Der Hals wurde eingeleimt statt geschraubt und als Korpusholz wurde Mahagoni mit einer aufgeleimten Ahornplatte verwendet. Um der Gitarre den Einstieg in den Markt zu erleichtern, suchte Gibson einen Musiker, der für ihr Instrument werben sollte, und stießen auf den oben schon erwähnten Les Paul. Der war von diesem Modell begeistert und spielte es bei all seinen folgenden Konzerten. Nach diesem Gitarristen erhielt die Gitarre von Gibson auch den Namen Les Paul (Abb.3.a). Der durch den Mahagonikorpus und den

7

neu entwickelten Humbucker-Tonabnehmer eher dumpfe Klang war damals aber nicht gefragt und das Les Paul Modell wurde anfangs nicht oft verkauft. In dieser Zeit entwickelte Gibson ein neues Modell namens SG, das der Les Paul zwar sehr ähnlich ist, aber eine andere Form hat (Abb.3.b). Erst später als mehr Blues gespielt wurde, war der weiche und dumpfe Klang der Les Paul gefragt und Gibson fing wieder an, diese serienmäßig zu produzieren. Heutzutage gehört das Les Paul Modell zu den am meisten verkauften E-Gitarren und wurde von vielen berühmten Gitarristen wie z.B. Jimmy Page (Led Zeppelin) gespielt.

b)



Abb.3: a) Gibson Les Paul nach [6] b) Gibson SG nach [7]

Heute gibt es unglaublich viele Unternehmen, die Gitarren herstellen. Neben Gibson und Fender haben auch PRS, Ibanez, Epiphone (Tochterfirma von Gibson) und Yamaha große Marktanteile. Die meisten Firmen waren aber eher einfallslos und begnügten sich damit, die erfolgreichen Modelle von Gibson und Fender zu kopieren.



Abb.4: Aufbau einer E-Gitarre nach [8]

Abb.4 zeigt den grundlegenden Aufbau einer E-Gitarre, um später auf die einzelnen Teile Bezug nehmen zu können.

3 Akustik

Die E-Gitarre gehört zur Gruppe der Saiteninstrumente, bei denen der Ton durch eine in Schwingung versetzte Saite erzeugt wird. Der Saitenschwingung ist die Grundlage der Tonerzeugung, sie kann mit Hilfe der Wellengleichung dargestellt werden.

3.1 Herleitung der Wellengleichung

Die Wellengleichung erhält man nach [9] aus einem Kräftegleichgewicht an einem kleinen Saitenstück (s. Abb. 5), das um die Strecke w aus der Ruhelage ausgelenkt ist.



Abb.5: Kräfte am Saitenelement

Wenn man sich für die Vertikalbewegung interessiert, müssen die Trägheitskraft und die Vertikalkomponenten der Spannkraft S im Gleichgewicht sein. Für ein kleines Saitenstück der Masse dm muss nach dem 2. Newtonschen Grundgesetz die Kräftebilanz

$$dm \,\ddot{w} = S \sin(\alpha + d\alpha) - S \sin \alpha \qquad (1)$$

erfüllt sein. Für ein Saitenstück der Länge dl mit dem Querschnitt A und der Dichte ho ist die Masse

$$dm = \rho A dl = \rho A \sqrt{dx^2 + dw^2} = \rho A dx \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2}$$
(2)
$$dm \approx \rho A dx$$
(3)

wenn die Steigung der Saitenauslenkung dw/dx klein ist. Unter der damit verbundenen Annahme kleiner Winkel gilt, dass Sinus, Tangens und Winkel ungefähr gleich sind,

$$\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{dw}{dx} \ll 1$$
 (4)

Wenn man das in Gl. (1) einsetzt, verschwinden die Sinusterme und die Kräftebilanz lautet

$$\rho A dx \, \ddot{w} = S \, d\alpha \tag{5}$$

Oder, wenn man den Winkel ganz eliminiert, indem man ihn durch die die Steigung ersetzt

$$\rho A dx \, \ddot{w} = S \, d \left(\frac{dw}{dx} \right) \tag{6}$$

Daraus erhält man, wenn man nach *\"waufl\"ost*, die Wellengleichung

$$\ddot{w} = \frac{S}{A\rho}w^{\prime\prime} \qquad (7)$$

Dabei bezeichnet S die Spannkraft, A die Querschnittsfläche der Saite und ρ die Dichte des Saitenwerkstoffs. Der Term $\frac{S}{A\rho}$ hat die Dimension eines Geschwindigkeitsquadrats. Im Folgenden wird daher meistens die Abkürzung c^2 für $\frac{S}{A\rho}$ verwendet, was eine übersichtlichere Darstellung erlaubt. Die Größe

$$c = \sqrt{\frac{S}{A\rho}} \qquad (8)$$

hat dabei die Bedeutung einer Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störungen auf der Saite, wie man später sehen wird. Damit lautet die Wellengleichung kürzer formuliert

$$\ddot{w} = c^2 w'' \qquad (9)$$

Wenn w(x,t) die Auslenkung der Saite senkrecht zur Richtung der Ruhelage ist, besagt die Wellengleichung, dass die vertikale Beschleunigung der Saite proportional zur zweiten Ableitung nach dem Ort ist.

3.2 Lösung der Wellengleichung

Durch einen Lösungsansatz als Produkt einer Orts- und einer Zeitfunktion

$$w(x,t) = f(x) \cdot g(t) \qquad (10)$$

zerfällt die Wellengleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen. Durch zweimalige Ableitung des Lösungsansatzes und Einsetzen in die Wellengleichung (9) erhält man

$$\frac{\ddot{g}}{g} = c^2 \cdot \frac{f''}{f} \qquad (11)$$

Damit diese Beziehung für alle x und t gilt, müssen die linke und die rechte Seite einen konstanten Wert besitzen. Wenn man für diese Konstante $-\omega^2$ setzt, erhält man die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\ddot{g} + \omega^2 g = 0 \qquad (12)$$
$$f'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f = 0 \qquad (13)$$

Naheliegende Lösungen beider Gleichungen sind sin- und cos-Funktionen, da bei diesen die zweite Ableitung wieder die Ausgangsfunktion mal einem Faktor ergibt. Da sowohl cos als auch sin Lösungen sind, ist auch deren Summe eine Lösung. Da außerdem konstante Faktoren keine Rolle spielen, lautet die allgemeine Lösung dieser beiden Differentialgleichungen nach [10]

$$g(t) = A \cdot sin(\omega t) + B \cdot cos(\omega t)$$
(14)

und

$$f(x) = C \cdot \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + D \cdot \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)$$
(15)

Daraus ergibt sich für die Lösung der Wellengleichung aus dem Produktansatz Gl. (10)

$$w(x,t) = [A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t)] \left[C \cdot \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + D \cdot \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \right]$$
(16)

Die noch unbestimmten Konstanten A, B, C, und D bekommt man aus den Rand- und Anfangsbedingungen.

Randbedingungen

Da die Gitarrensaite an den Einspannstellen x=0 und x=L aufliegt, kann es dort keine Auslenkung geben. Es gilt

$$w(0,t) = 0$$
 (17)

und

 $w(L,t) = 0 \tag{18}$

Durch Einsetzten der ersten Randbedingung in Gl. (16) sieht man, dass D=0 sein muss, da cos(0)=1 ist. Durch Einsetzten der zweiten Randbedingung erhält man

$$\sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) = 0 \qquad (19)$$

Diese Bedingung ist immer dann erfüllt, wenn das Argument der Sinusfunktion ein Vielfaches von π ist. Daraus folgt, wenn man die Ausbreitungsgeschwindigkeit nach Gl. (8) wieder einsetzt

$$\frac{\omega}{\sqrt{\frac{S}{A\rho}}} \cdot L = i \cdot \pi \qquad (20)$$

Damit hat man eine Gleichung gefunden, mit der man die bis jetzt noch unbekannte Konstante ω bestimmen kann. Es ergibt sich

$$\omega_i = \frac{i \cdot \pi}{L} \sqrt{\frac{S}{A\rho}} \qquad (21)$$

Weil i die Werte aller natürlicher Zahlen annehmen kann, gibt es beliebig viele solche Konstanten, die deshalb noch den Index i erhalten. Mit der Definition der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ bekommt man daraus die Eigenfrequenzen der Gitarrensaite

$$f_i = \frac{i}{2 \cdot L} \sqrt{\frac{S}{A\rho}} \qquad (22)$$

i=1 liefert die Grundschwingung, die auch den Zusammenhang zwischen Spannkraft und Tonhöhe angibt. Für i>1 erhält man die Oberschwingungen der Saite. Wenn man ω_i in Gl. (16) einsetzt, erhält man unendlich viele Lösung für die Wellengleichung mit der Form

$$w_i(x,t) = [A \cdot \sin(\omega_i t) + B \cdot \cos(\omega_i t)] \cdot \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$$
(23)

Die Konstante C wurde in die Konstanten A und B hineingezogen. Zu jeder Eigenfrequenz gehört auch eine eigene Schwingungsform. Davon gibt es unendlich viele. Die ersten 5 davon sind in Abb.6.a zu sehen. Dazu gehören die in Abb.6.b gezeigten entsprechenden Obertöne, die in ganzzahligen Verhältnissen zum Grundton und zueinander stehen und die auch die bekannten Tonintervalle bilden. Diese Töne können zusätzlich zur Grundschwingung alle auf der Saite auftreten und ihre Zusammensetzung bestimmt die Klangfarbe. Durch die Obertonzusammensetzung unterscheidet sich auch der Klangeindruck verschiedener Instrumente, wenn derselbe Ton auf ihnen gespielt wird.



Abb.6: Eigenschwingungen und Obertöne: a) Schwingungsformen für i = 1 bis 5, b) Obertonreihe [11]

Wegen der Linearität der Wellengleichung ist die allgemeine Lösung die Summe der Einzellösungen $w_i(x,t)$

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} [A_i \cdot \sin(\omega_i t) + B_i \cdot \cos(\omega_i t)] \cdot \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$$
(24)

Anfangsbedingungen

Unbekannt sind nun nurmehr die Koeffizienten A_i und B_i , die man aus den Anfangsbedingungen erhalten kann. Diese sind bei einer gezupten Saite die Auslenkung in Form eines Dreiecks mit maximaler Auslenkung H an der Stelle L/n, wobei n ein Saitenbruchteil ist (siehe Abb.7)

$$w(x,0) = w_0(x) = \begin{cases} \frac{nH}{L}x & f \ddot{\mathrm{u}} r \, x < \frac{L}{n} \\ \frac{nH}{(n-1)} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & f \ddot{\mathrm{u}} r \, x \ge \frac{L}{n} \end{cases}$$
(25)

und die Startgeschwindigkeit null

$$\dot{w}(x,0) = 0 \qquad (26)$$



Abb.7: Anfangsbedingung für die Auslenkung H

Die beiden Bedingungen werden in Gl. (24) und in deren Ableitung eingesetzt

$$w_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_i \cdot \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$$
(27)
$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i A_i \cdot \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$$
(28)

Die Berechnung der Koeffizienten scheint zunächst unmöglich, weil man nur zwei Gleichungen für unendlich viele Unbekannte zur Verfügung hat. Eine erstaunlich einfache Lösung ergibt sich aber, wenn man die sogenannten Orthogonalitäts- Eigenschaften der Integrale der Sinusfunktionen nutzt (s. [12]). Zur Berechnung der B_i und A_i multipliziert man nach [12] beide Gleichungen mit $sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ und integriert von 0 bis L. Aufgrund der Orthogonalität der Eigenfunktionen

$$\int_{0}^{L} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & f \ddot{\mathrm{u}} r \ k \neq i \\ \frac{L}{2} & f \ddot{\mathrm{u}} r \ k = i \end{cases}$$
(29)

fallen dann alle Terme weg, für die $k \neq i$ gilt, und es bleibt

$$B_k = \frac{2}{L} \int_0^L w_0(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \qquad (30)$$
$$A_k = 0 \qquad (31)$$

Im Lehrbuch von Greiner [12], S. 108 sind die Koeffizienten B_k für den Fall der Anzupfung in der Saitenmitte und bei Fletcher und Rossing [13] bei L/5 angegeben. Wenn man das Integral für B_k für beliebiges n auswertet, erhält man

$$B_{k} = \frac{2Hn^{2}}{(n-1)k^{2}\pi^{2}} \cdot \sin\frac{k\pi}{n}$$
(32)

Die Lösung der Wellengleichung lautet damit letztendlich

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \cos(\omega_k t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$
(33)

3.3 Diskussion der Lösung

Die Lösung setzt sich aus einer Summe aller Eigenschwingungen zusammen. Die Summenglieder bestehen aus jeweils 3 Termen:

- B_k enthält den Einfluss der Anzupfstelle
- $\cos(\omega_k t)$ beschreibt das zeitliche Schwingungsverhalten
- $sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ enthält die räumliche Schwingung

Bei dieser Form der Wellengleichung wird eine Dämpfung der Saitenschwingung vorerst nicht berücksichtigt. Für eine Untersuchung der Zusammensetzung eines Tons ist diese jedoch nicht entscheidend, da die Abklingzeit des Tons im Vergleich zur Schwingungsdauer groß ist (die Abklingzeit des Tons der Leersaite A auf der Gitarre beträgt einige Sekunden, die Schwingungsdauer jedoch nur 0.0091 s).

Wenn man den Koeffizient B_k genauer betrachtet, sieht man, dass er bei größer werdendem k immer mehr abnimmt. Diesem hyperbolischen Abfall ist eine Sinusschwingung überlagert, die die Koeffizienten verkleinert oder auch negativ macht. Die Sinus-Funktion ist von der Anzupfstelle L/n abhängig, die somit auch die Tonzusammensetzung bestimmt. Umso größer n ist, umso weniger Obertöne fallen weg und die ersten, ausschlaggebenden Obertöne werden mehr betont.



Abb.8: a) Verschiedene berechnete Amplitudenspektren zum Einfluss der Anzupfstelle. Dargestellt ist wegen der logarithmischen Skala der Betrag von $B_{k,}$ b) Frequenzspektrum bei L/2, c) Frequenzspektrum bei L/3

In Abb.8.a sieht man, dass je nach Anzupfstelle L/n jeder n-te Wert wegfällt. Diesen Effekt kann man auch in der Praxis feststellen. In Abb.8.b/c sieht man die Frequenzspektren der A-Leersaite (Grundfrequenz 110 Hz) mit Anregung bei L/2 und L/3. Man kann in Abb.8.b sehr gut erkennen, dass jeder 2-te Oberton deutlich geschwächt wird. In Abb.8.c ist jede 3-te Oberschwingung stark geschwächt. Diese Bilder habe ich mit dem Programm Soundcard Scope V 1.22 von C. Zeitnitz und einer Yamaha Pacifica E-Gitarre erzeugt.

Da B_k von der Anzupfstelle abhängig ist, sind auch die Lösungen der Wellengleichung je nach unterschiedlicher Anregungsposition verschieden. In den folgenden Bildern ist das für L/2, L/3 und L/8 gezeigt.





t=0.002s

t=0.003s t=0.004s

t=0.005s

t=0.006s t=0.007s t=0.008s t=0.009s

t=0.010s

0.5

0

-0.5

Auslenkung w [cm]

b)

a)





Abb.9: Zeitlicher Verlauf der Saitenschwingung bei unterschiedlichen Anzupfstellen (Grundfrequenz=100 Hz) a) L/2, b) L/3, c) L/8

Man sieht aus Abb.9, dass sich die Störung durch Anzupfen nach beiden Seiten auf der Saite ausbreitet, an den Enden reflektiert wird und sich periodisch wiederholt. An diesen Bildern lässt sich auch leicht die Rolle von c als Ausbreitungsgeschwindigkeit zeigen. Wenn man aus Gl. (8) c berechnet, so ergeben sich bei einer Frequenz von 100 Hz etwa 130 m/s. Diesen Wert erhält man auch, wenn man z.B. in Abb.9.b die Geschwindigkeit des über die Saite wandernden Auslenkungsmaximums aus dem Abstand der Kurven in x-Richtung und der dazwischenliegenden Zeit berechnet.

Eine anschaulichere 3D Darstellung der Gesamtschwingung ist für den Fall der Anregung bei L/2 in der nächsten Abbildung gegeben.



Abb.10: Zeitlicher Verlauf der ungedämpften Saitenschwingung bei Anzupfstelle L/2

Wie oben schon angemerkt ist bei dieser Lösung der Wellengleichung die Dämpfung noch nicht berücksichtigt. Tatsächlich klingt erfahrungsgemäß die Saitenschwingung nach einigen Sekunden ab. Der einfachste Weg, das in der Wellengleichung darzustellen , ist , auf der linken Seite einen zur Geschwindigkeit proportionalen Dämpfungsterm einzufügen. Das wirkt sich auf die Lösung vor allem so aus, dass ein zusätzlicher exponentieller Faktor $e^{-\frac{d}{2}t}$ mit Dämpfungskonstante d auftritt [14].

Abb.11 zeigt das Abklingen der Amplitude. Die Dreiecksform bleibt dabei aber erhalten. Das ist jedoch nicht realistisch. Nach [15] ist die Dämpfung abhängig von der Frequenz, wobei die Oberschwingungen stärker gedämpft werden als die Grundschwingung. Um das zu veranschaulichen, wurde der Dämpfungsfaktor mit der oberschwingungsbestimmenden Variable k multipliziert. Dadurch erhält man ein realistischeres Bild, das in Abb.12 gezeigt ist. Allerdings ist diese Form der Lösung nicht mit der Wellengleichung verträglich. Nach [15] sind dazu Formen der Wellengleichung mit höheren Ableitung der Auslenkung nach Ort und Zeit notwendig, die nur mit numerischen Verfahren gelöst werden können.



Abb.11: Zeitlicher Verlauf der Saitenschwingung bei Anzupfstelle L/2 mit Dämpfungsfaktor $e^{-\frac{f_o}{2} \cdot t}$ (Grundfrequenz $f_o = 100Hz$)



Abb.12: Zeitlicher Verlauf der Saitenschwingung bei Anzupfstelle L/2 mit frequenzabhängigem Dämpfungsfaktor $e^{-\frac{k*f_o}{2}t}$ ($f_o = 100Hz$)

3.4 Schwingung der Saite am Tonabnehmer

Bei der E-Gitarre interessiert vor allem die Schwingung der Saite über den Tonabnehmerpositionen, da nur dieses Signal auch elektrisch verstärkt wird. Um die Schwingung über dem Tonabnehmer zu erhalten, muss man in die Lösung der Wellengleichung die Position des Tonabnehmers (L/m) (s. Abb.7) als Ortskoordinate einsetzen. Man bekommt

$$w\left(\frac{L}{m},t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2Hn^2}{(n-1)k^2\pi^2} \cdot \sin\frac{k\pi}{n} \cdot \sin\frac{k\pi}{m}\right] \cdot \cos(\omega_k t) \qquad (34)$$

Dadurch erhält man eine Funktion, die nurmehr von der Zeit abhängig ist und die sich als Summe der Grundschwingung und aller Oberschwingungen darstellt. Der zusätzliche Faktor $sin \frac{k\pi}{m}$, der von der Tonabnehmerposition abhängt, verändert die Koeffizienten und damit die Gewichtung der Obertöne zusätzlich.

In den folgenden Abbildungen sieht man die Zusammensetzung des Frequenzspektrums an verschiedenen Tonabnehmerpositionen. Die strichlierten Kurven zeigen zur Veranschaulichung den zusätzlichen Sinus-Faktor. Mit B_k werden in den Bildern nun die gesamten Koeeffizienten benannt.

In Abb.13.a sieht man, dass durch den zusätzlichen Sinusfaktor die Gewichtungen der Oberschwingungen nochmals sinusförmig moduliert werden. Dadurch werden einige Obertöne weiter abgeschwächt. Abb.13.b zeigt, dass auch zusätzliche Auslöschungen auftreten können. In diesem Fall fällt jede 19-te Oberschwingung ganz weg. In Abb.13.c ist das Wegfallen bestimmter Obertöne noch viel markanter, es fällt jede 4-te Oberschwingung weg, wobei jeder 8-te Oberton bereits wegen der Anzupfstelle L/8 fehlt.

Diese Eigenschaften haben gravierende Auswirkungen auf den Klang. Umso näher sich der Tonabnehmer an der Brücke (Saitenauflage am Korpus) befindet, umso obertonreicher und härter ist der Klang, da nur wenige Oberschwingungen eliminiert werden. Ist der Tonabnehmer näher am Hals positioniert, fallen viele Obertöne durch die Sinusschwingung ganz weg und der Klang wird wärmer und bluesiger.





c)

a)



Abb.13: Amplitudenspektrum für verschiedene Tonabnehmer- Positionen mit Anregung bei L/8. a) Tonabnehmerposition L/32, b) Tonabnehmerposition L/19, c) Tonabnehmerposition L/4

Abb.14 zeigt ein Beispiel für die Saitenschwingung aus der Lösung der Wellengleichung über dem Tonabnehmer und die 8 wichtigsten Teilschwingungen, aus denen sich der Klang zusammensetzt (Grundton mit der Frequenz 1000 Hz und 7 Oberschwingungen). Aufgrund der Anzupfposition bei L/3 entfallen die 2-te und die 5-te Oberschwingung (k=3, k=6) und aufgrund der Tonabnehmerposition bei L/5 die 4-te Oberschwingung (k=5).



Abb.14: Gesamtschwingung zusammengesetzt aus Grundschwingung (1000 Hz) und 1-te bis 7-te Oberschwingung für Anregung bei L/3 und Tonabnehmer bei L/5

4 Elektronik

Da das akustische Signal der Gitarre im Vergleich zu anderen Instrumenten wie Bläser oder Schlagzeug nur sehr leise ist, konnte man die Gitarre nur als Begleitinstrument einsetzen. Es musste eine Möglichkeit gefunden werden, die Gitarre so zu verstärken, dass sie mit den anderen Musikinstrumenten mithalten kann. Anfangs versuchte man, die Lautstärke durch überdimensionierte Resonanzkörper zu verstärken. Diese erschwerten das Spielen aber enorm und konnten sich deswegen nicht durchsetzen. Erst durch die Erfindung des magnetischen Tonabnehmers wurde es möglich, die Gitarre als Soloinstrument innerhalb einer Band zu verwenden. Kapitel 4.1 orientiert sich an Lemme [1], S.83 ff.

4.1 Aufbau des Tonabnehmers

Die Grundidee des magnetischen Tonabnehmers liegt darin, die mechanische Schwingung der Saite in ein elektrisches Signal umzuwandeln. Dieses Signal kann durch einen Verstärker verstärkt werden und versetzt dann die Membran eines Lautsprechers in Schwingung. Dadurch wird das elektrische Signal wieder in ein für den Mensch hörbares akustisches Signal umgewandelt.

Diese Tonabnehmer basieren auf dem Prinzip der Induktion. Sie bestehen aus einem oder mehreren Magneten, die von einer Spule umwickelt sind. Die schwingenden Saiten durchlaufen ein Magnetfeld und verändern dieses durch ihre Schwingung andauernd. Dadurch wird eine Wechselspannung induziert. Dieses Prinzip funktioniert natürlich nur mit Stahlsaiten. Saiten aus Nylon oder Darm, die bei akustischen Instrumenten oft verwendet werden, verändern den magnetischen Fluss durch ihre Schwingung nicht. Für diese Materialien wurde der Piezo-Tonabnehmer entwickelt, der die Schwingungen des Korpus in ein elektrisches Signal umwandelt. Diese Tonabnehmer bestehen aus Piezo-Kristallen und werden an einer beliebigen Position auf dem Korpus des Instruments angebracht. Wenn das piezoelektrische Material durch die Schwingung des Korpus verformt wird, entsteht eine Spannung. Diese Spannung kann man genau wie die eines magnetischen Tonabnehmers verstärken und über einen Lautsprecher hörbar machen.

Da bei E-Gitarren hauptsächlich magnetische Tonabnehmer verwendet werden, werden diese in den folgenden Abschnitten genauer beschrieben.

Im Laufe der Zeit haben sich zwar sehr viele verschiedene Arten solcher Tonabnehmer entwickelt, das grundlegende Prinzip mit Magneten und einer darum gewickelten Spule ist aber immer dasselbe. Am wichtigsten ist die Unterscheidung zwischen Tonabnehmern mit einer (Single-Coil) und mit zwei Spulen (Humbucker).

Der Single-Coil Tonabnehmer besteht aus 6 Stabmagneten, um die eine Spule aus sehr dünnem (0.06 mm) Kupferdraht mit etwa 8000 Windungen gewickelt ist (s. Abb.15.a). Durch ein Gehäuse aus Plastik wird das Innenleben des Tonabnehmers geschützt. Dieser Tonabnehmer wurde erstmals auf einer Telecaster verwendet und hat sich seitdem nicht mehr besonders verändert. Die Fertigung ist durch neue Produktionsmethoden natürlich viel genauer geworden. Vor allem die Anzahl der Wicklungen variierte in der ersten Zeit sogar bei Tonabnehmern desselben Modells so stark, dass der Klang dadurch maßgeblich verändert wurde. Außerdem werden die Tonabnehmer heutzutage in ein Wachsbad eingelegt, um zu verhindern dass sich die um die Magnete gewickelte Spule bewegen kann. Das größte Problem der Single-Coil Tonabnehmer ist, dass sie leicht magnetische Streufelder

von Netztransformatoren oder Leuchtstofflampen-Drosseln einfangen, und dem Signal der Saitenschwingung dadurch noch ein unangenehmes Netzbrummen überlagert wird.

Die Lösung dieses Problems fand Seth Lover, ein Mitarbeiter der Firma Gibson. Er hatte die Idee, die Spulen zweier Single-Coils gegensinnig miteinander zu verbinden, wobei die Magnete in einem der Tonabnehmer andersherum orientiert sind (s. Abb.15.b). Das Netzbrummen hat bei beiden Tonabnehmer zwar denselben Betrag, aber ein umgekehrtes Vorzeichen, wodurch sich das Netzbrummen heraushebt. Das Signal der Saiten wird jedoch addiert. Tonabnehmer nach diesem Prinzip wurde Humbucking Pickup oder einfach nur Humbucker genannt. Wörtlich übersetzt heißt das brummunterdrückender Tonabnehmer. Humbucker liefern so ein klareres Signal und sind heutzutage in sehr vielen Gitarren zu finden. Sehr oft werden in einer Gitarre beide Typen von Tonabnehmern verwendet, um die Klangvielfalt zu erhöhen. Da Humbucker aus zwei hintereinandergeschalteten Spulen bestehen, haben sie eine höhere Induktivität und daher auch eine geringere Resonanzfrequenz. D. h., dass die Höhen mehr abgeschwächt werden (s. unten). Aus diesem Grund wird der Humbucker den Single-Coil Tonabnehmer trotz des Nachteils mit den Brummspannungen wohl nie ganz ablösen.

Statt vieler kleiner Stabmagneten werden in Tonabnehmern auch oft Weicheisenkerne eingesetzt, die durch einen Stabmagneten unterhalb der Spule magnetisiert werden (s. Abb.15.a). Diese Art von Tonabnehmer habe ich auch beim Bau meiner E-Gitarre verwendet.



Abb.15: a) Verschiedene Tonabnehmerbauarten [16] und b) Humbucker-Standardschaltung

4.2 Ersatzschaltbild eines Tonabnehmers

Die elektrischen Eigenschaften eines Tonabnehmers kann man mit einem Ersatzschaltbild darstellen. Das besteht aus einer Serienschaltung eines ohmschen (R) und eines induktiven (L) Widerstands, die parallel zu einem kapazitivem Widerstand (C) geschalten sind (s. Abb.16.a). Wenn die Saite über einem Tonabnehmer in Schwingung versetzt wird, entsteht durch Induktion eine Wechselspannung. Im Ersatzschaltbild kann man das als Spannungsquelle darstellen (s. Abb.16.b).

Im Folgenden soll der weitere Signalverlauf, der durch Tonabnehmer und elektrische Bauteile wie Ton- und Lautstärkeregler beeinflusst wird, berechnet werden.



Abb.16: Tonabnehmer Ersatzschaltungen nach Lemme [1]. a) Ersatzschaltbild, b) Darstellung als Wechselspannungsquelle

Tab.1 enthält zusammenfassend die dafür verwendeten Widerstandsformeln und Rechenregeln. Dabei wird nach [17] die komplexe Schreibweise der Wechselstromwiderstände verwendet, weil das den Berechnungsaufwand für die untersuchten Schaltungen stark vereinfacht. Die Schaltungsberechnung wurden wie auch die anderen Berechnungen mit dem Programm GNU-Octave [18] durchgeführt. Dieses Programm enthält Funktionen für die Berechnung des Betrags und des Phasenwinkels komplexer Ausdrücke, so dass die oft mühsame händische Berechnung dieser Größen nicht erforderlich ist.

	Ohmscher Widerstand	Induktiver Widerstand	Kapazitiver Widerstand			
Wechselstrom- widerstand bzw. Impedanz Z	R	jωL	<u>1</u> <i>jωC</i>			
Leitwert 1/Z	1/R	$\frac{1}{j\omega L}$	<i>jω</i> C			
Rechenregeln	<u>1.</u> <u>Kirchhoffsches Gesetz:</u> In einem geschlossenen Stromkreis ist die Summe aller Spannungen $\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$					
	2. <u>Kirchhoffsches Gesetz</u> : An den Knotenpunkten elektrischer Schaltungen ist die Summe aller Ströme $\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$.					
	Bei Reihenschaltung addieren sich die Widerstände					
	$Z = Z_1 + Z_2$					
	Bei Parallelschaltung addieren sich die Leitwerte					
	$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$					
Die Größe des Gesamtwiderstands ergibt sich aus dem Betrag der kom Impedanz Z						
	Die Phase des Gesamtwiderstands ergibt sich aus dem Phasenwinkel der komplexen Impedanz Z					
Tab.1: Widerstände, Leitwerte und Rechenregeln für die Berechnung von Wechselstromschaltungen						
in komplexer schre	INMEISE [TO].					

4.3 Vermessung der Tonabnehmer

a)

Bevor man den weiteren Signalverlauf in der E-Gitarre berechnen kann, muss man zunächst R, L und C für den Tonabnehmer bestimmen. Diese Werte sind bei jedem Tonabnehmer unterschiedlich und müssen durch eine geeignete Messmethode ermittelt werden. Laut Caspari [19] schickt man dazu die Wechselspannung eines Sinusgenerators durch einen Tonabnehmer und greift das Ausgangssignal an einem Lastwiderstand R ab. Der Messaufbau ist in Abb.17 dargestellt.

b)





Abb.17: a) Messaufbau nach Caspari [19], b) Vermessung des Tonabnehmers mit dem Oszilloskop

Bezeichnet man den Gesamtwiderstand des Tonabnehmers mit Z und wendet die Kirchhoffschen Regeln an, so ergibt sich aus $U_1 = ZI + U_2$ und $U_2 = RI$

$$Z = R\left(\frac{U_1}{U_2} - 1\right) \qquad (35)$$

Die Messung wurde für einen Harley Benton HB-S # 153922 Single-Coil und einen HB-H # 153922 Humbucker Tonabnehmer durchgeführt. Das Eingangssignal von 12 V wurde mit einem Conrad FG 200 Sinusgenerator erzeugt. Das Ausgangssignal wurde an einen Lastwiderstand R mit einem Siemens Oscillarzet 10 2-Kanal Oszilloskop abgenommen. Der Lastwiderstand von nominell 600 Ohm wurde mit einem Digitalmultimeter der Marke V&A Typ VA18B zu 596 Ohm bestimmt. Wegen der Ungenauigkeit der Frequenzeinstellung des Sinusgenerators wurde die Frequenz zusätzlich mit einem Multimeter (ebenfalls V&A Typ VA18B) gemessen. Die Frequenz wurde von 50 Hz bis 70000 Hz bzw. 100000 Hz beim Humbucker variiert. Zur Messung der kleinsten auftretenden Signale musste der empfindlichste Messbereich des Oszilloskops (5 mV/Teilstrich) benutzt werden. Dabei traten teilweise auch Signalverformungen und -verbreiterungen auf, was die Messung dort unsicher machte. Die Messergebnisse sind in Tab.2 dargestellt. Abb.19 zeigt einige Photographien der Signale

Single-Coil			Humbucker			
Frequenz	Ausgangs-	Impedanz	Frequenz	Ausgangs-	Impedanz	Phase
	spannung			spannung		
[Hz]	[V]	[Ohm]	[Hz]	[V]	[Ohm]	[Grad]
50	0.820	8180	100	3.25	18200	18.0
70	0.800	8400	200	2.90	21210	28.8
100	0.760	8873	500	1.75	39590	50.4
150	0.720	9400	1000	1.00	74360	61.2
200	0.660	10310	2000	0.50	155480	57.6
300	0.640	10650	3000	0.27	293680	59.4
400	0.550	12490	4000	0.13	617240	57.6
500	0.500	13800	4600	0.10	804440	0
600	0.420	16540	5000	0.10	804440	-18.0
700	0.380	18350	6000	0.16	500240	-54.0
800	0.340	20576	7000	0.23	345940	-50.4
1000	0.300	23400	8000	0.31	254920	-57.6
1200	0.240	29400	10000	0.37	212480	-57.6
1500	0.200	35400	12000	0.50	155480	-69.1
1700	0.180	39400	14000	0.62	124080	-80.6
2000	0.150	47400	16000	0.73	104360	-92.1
2500	0.122	58416	20000	0.94	79540	-86.4
2700	0.108	66070	25000	1.20	60840	-81.0
3000	0.096	74400	50000	2.45	26350	-72.0
4000	0.066	108500	100000	4.15	12790	-57.6
5000	0.045	159400				
6000	0.029	247675				
7000	0.016	449400				
8000	0.020	359400				
9000	0.024	299400				
10000	0.030	239400				
12000	0.044	163040				
15000	0.066	108491				
20000	0.102	69988				
25000	0.124	57464				
30000	0.150	47400	-			
40000	0.230	30705				
50000	0.300	23400	-			
70000	0.420	16540				
Tab.2: Ergebnisse der Messung der Impedanz Z bei Single-Coil und Humbucker (Eingangsspannung						
U_1 =12 V, Lastwiderstand R=596 Ohm beim Single-Coil und 6760 Ohm beim Humbucker)						

bei unterschiedlichen Frequenzen, wo man im Bereich um etwa 8000 Hz deutlich die erwähnte Verformung und auch eine Verbreiterung des Signals erkennen kann.



Abb.18: Impedanz-Messwerte und theoretische Vergleichskurven für Harley Benton HB-S # 153922 Single-Coil Tonabnehmer

In Abb.18 sieht man u.a. die gemessenen Wechselstromwiderstände abhängig von der Frequenz. Für kleine Frequenzen bleibt der Widerstand zunächst konstant. Der Wert bei 10 Hz bezeichnet den Gleichstromwiderstand. Zwischen 500 und 7000 Hz steigt er an und fällt dann wieder ab. Aus diesen Messwerten kann man nach Caspari [19] die elektrischen Kennwerte des Tonabnehmers erhalten. Den ohmschen Widerstand bekommt man als Grenzwert der Messkurve bei kleinen Frequenzen als R=7160 Ohm. Die Induktivität erhält man aus einem beliebigen Wertepaar (f,Z) im Bereich des linearen Anstiegs der Kurve aus der Formel

$$L = \frac{Z}{2\pi f} \qquad (36)$$

Daraus ergibt sich L=3.8 H aus dem Messwert bei 2000 Hz. Die Kapazität bekommt man aus dem linearen Abfall der Kurve bei hohen Frequenzen auf gleiche Weise wie bei der Induktivität. Durch Einsetzen des Wertepaares bei 40 kHz in die Gleichung

$$C = \frac{1}{2\pi fZ} \qquad (37)$$

erhält man C=130 pF. Die Messmethode kann man besser verstehen, wenn man den Wechselstromwiderstand des Tonabnehmers berechnet und verschiedene Grenzfälle betrachtet. Der in Abb. 17 a eingezeichnete zusätzliche Widerstand R_p, der parallel zur Tonabnehmerkapazität liegt, wird zunächst noch vernachlässigt, da er sehr groß ist. Im einfacheren Ersatzschaltbild nach Abb.16.a sieht man, dass der Wechselstromwiderstand aus einem ohmschen und einem induktiven Widerstand in Serie und einem dazu parallelen kapazitivem Widerstand besteht. Durch Anwendung der Rechenregeln aus Tab.1 ergibt sich der Wechselstromwiderstand

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C}$$
(38)

Für sehr kleine ω fallen der induktive und kapazitive Term kaum ins Gewicht und es bleibt $Z \approx R$. Wenn ω groß, C aber sehr klein ist, spielen der ohmsche und der kapazitive Term beinahe keine Rolle, weil ωC immer noch klein ist, und es ergibt sich $Z \approx j\omega L$. Für sehr große ω ist nurmehr der kapazitive Term ausschlaggebend und es gilt $Z \approx \frac{1}{j\omega C}$.







Abb. 19: Eingangs- und Ausgangssignale bei Harley Benton HB-S # 153922 Single-Coil Tonabnehmer

Der Wechselstromwiderstand Z wurde nicht direkt gemessen, sondern nach Gl. (35) aus Spannungsund Widerstandswerten ermittelt, die jeweils aus separaten Messungen stammen. Aus den damit verbundenen Messfehlern lässt sich der Gesamtfehler der hier durchgeführten Bestimmung des Wechselstromwiderstands abschätzen. Wenn man den Term -1 in Gl. (35) weglässt, ergibt sich nach [20] durch die Methode des logarithmischen Differenzierens für den relativen Fehler der Impedanz Z

$$\left|\frac{\Delta Z}{Z}\right| = \left|\frac{\Delta R}{R}\right| + \left|\frac{\Delta U_1}{U_1}\right| + \left|\frac{\Delta U_2}{U_2}\right|$$
(39)

Den Messfehler des Widerstands kann man dem Handbuch des Messgeräts entnehmen. Um den Messfehler der Spannungen zu erhalten, vergleicht man die Strichstärke mit dem Abstand zwischen Signalmaximum und Minimum in den Oszilloskop-Bildern. Für die Frequenzen in Abb.19 sind die Messunsicherheiten und der Gesamtfehler in Tab.3 zusammengestellt.

f [Hz]	$\frac{\Delta R}{R}$ [%]	$\frac{\Delta U_1}{U_1} [\%]$	$\frac{\Delta U_2}{U_2} [\%]$	$\frac{\Delta Z}{Z}$ [%]		Z [Ohm]	ΔZ [Ohm]
2000	1	3.8	5.4	10.2	<u>±</u> 5.1	47400	4835
4500	1	3.8	7.7	12.5	±6.3	133950	16744
7500	1	3.8	20.7	25.5	<u>+</u> 12.8	404400	103120
8000	1	3.8	20.0	24.8	±12.4	359400	89130
10000	1	3.8	25.0	29.8	<u>+</u> 14.9	239400	71340
17500	1	3.8	6.2	11.0	±5.5	89240	9816
25000	1	3.8	3.7	8.5	<u>+</u> 8.3	57464	4884
Tab. 3: Messunsicherheiten							

Daraus ergeben sich zum Teil recht große Unsicherheiten im Bereich des Kurvenmaximums. Allerdings wurden die Bilder bei 8000 und 10000 Hz, wo die mögliche Auflösung für U₂ nicht ausgenutzt wurde, nicht für die Werte in Tabelle 2 verwendet, sondern diese Bilder wurden separat zur Darstellung der Signalverformung aufgenommen. Deshalb sind die Messungen dort in Wirklichkeit genauer, weil für U₂ ein Messbereich gewählt wurde, der die ganze Schirmbreite ausnutzt. In Abb. 18 ist auch der mit den für R, L und C ermittelten Werten berechnete theoretische Wert für den Wechselstromwiderstand des Tonabnehmers nach Gl. (35) entsprechend dem Ersatzschaltbild nach Lemme [1] (s. Abb.16.b) eingezeichnet (rote Kurve). Man sieht, dass die Übereinstimmung bis auf das Gebiet des Kurvenmaximums gut ist. Das lässt sich noch verbessern, wenn man das modifizierte Ersatzschaltbild nach Caspari [19] aus Abb. 17.a verwendet. Der zusätzliche Parallelwiderstand R_p wurde dafür durch Probieren zu 500 kOhm bestimmt. Der theoretische Gesamtwiderstand ergibt sich dann zu

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R+j\omega L} + j\omega C + \frac{1}{R_p}}$$
(40)

Damit ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung auch im Bereich des Kurvenmaximums zufriedenstellend (schwarze Kurve). In den folgenden Schaltungsberechnungen wurde deshalb das Ersatzschaltbild nach Caspari [19] verwendet.

Durch Anwendung der gleichen Methode wie beim Single-Coil Tonabnehmer ergeben sich für den Humbucker der ohmsche Widerstand R=16000 Ohm, die Induktivität L= 12.6 H, die Kapazität C=100 pF und der Widerstand R_p zu 950 kOhm. Da der Rechengang beim Humbucker und Single-Coil Tonabnehmer gleich sind, wird in den folgenden Untersuchungen in der Regel der Single-Coil Tonabnehmer verwendet, da bei diesem die Einstellung der Abnahmeposition des Signals bei späteren Vergleichsmessungen einfacher ist. Die gefundenen elektrischen Kennwerte sind in Tab.4 nochmals für die beiden untersuchten Tonabnehmer zusammengestellt.

	R [Ohm]	Rp [Ohm]	L [Henry]	C [pF)		
SC	7160	500000	3.8	130		
Humbucker	16000	950000	12.6	100		
Tab.4: Elektrische Kenndaten für die Ersatzschaltbilder der vermessenen Single Coil und Humbucker						
Tonabnehmer						

Abb.20 zeigt den Wechselstromwiderstand und die Phase über der Frequenz für den Humbucker. Die Phase wurde für den Single-Coil Tonabnehmer nicht ermittelt, weil man sie zur Bestimmung des Ersatzschaltbilds nicht braucht. Zur Überprüfung, ob das Ersatzschaltbild auch die Phase einigermaßen wiedergibt, wurde sie beim Humbucker aber zusätzlich verglichen. Wie man im Bild sieht, ist die Übereinstimmung im Prinzip gut. Die Abweichungen sind aber größer als beim Frequenzgang. Bei hohen Frequenzen gibt es die größten Unterschiede. Die Phasenverschiebung wurde aus den abgelesenen Teilstrichen am Oszilloskop-Bildschirm mit der Umrechnungsformel $\varphi = f \cdot \Delta TS \cdot ZPTS \cdot 360^{\circ}$ berechnet. Darin bedeuten ΔTS die Anzahl der Teilstriche auf der Zeitachse am Oszilloskop-Bildschirm und ZPTS das Zeitintervall pro Teilstrich.



Abb.20: Vergleich von Messung und Rechnung für den Wechselstromwiderstand des HB-H # 153922 Humbuckers. Oberes Bild: Betrag, unteres Bild: Phase.

4.4 Übertragungsverhalten des Tonabnehmers

Schon die elektrischen Eigenschaften im Tonabnehmer verformen das Signal, weil induktiver und kapazitiver Widerstand von der Frequenz der Wechselspannung abhängig sind. Das heißt, dass das Signal bei verschiedenen Frequenzen unterschiedlich stark verändert wird. Die Änderung des Ausgangssignals im Vergleich zum Eingangssignal wird durch die sogenannte Übertragungsfunktion charakterisiert. Man spricht auch vom Übertragungsfrequenzgang (s. [1], S. 110). Dabei ändert sich neben der Stärke oder Amplitude des Signals auch die Phasenlage. Der Frequenzgang kann nun, da die R, L und C-Werte des Tonabnehmers bekannt sind, mit den Kirchhoffschen Gesetzen aus dem Ersatzschaltbild nach Abb.21 berechnet werden.



Abb.21: Ersatzschaltbild des SC-Tonabnehmers und Bezeichnungen zur Berechnung des Frequenzgangs

Die zweimalige Verwendung der Maschenregel liefert

$$U_{i} = U_{R} + U_{L} + U_{C} = (R + j\omega L)I_{1} + \frac{1}{j\omega C}I_{2}$$
(41)
$$U_{C} = U_{a}$$
(42)

Nach der Knotenregel ist

$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{43}$$

Die Ströme I_2 und I_3 kann man aus dem Spannungsabfall an U_C und U_a bestimmen

$$U_{C} = \frac{1}{j\omega C} I_{2} \qquad (44)$$
$$U_{a} = R_{P} I_{3} \qquad (45)$$

Durch weiteres Umformen ergibt sich die Übertragungsfunktion des Tonabnehmers

$$\frac{U_a}{U_i} = \frac{1}{(R+j\omega L)(j\omega C + \frac{1}{R_P}) + 1}$$
(46)



Abb.22: Frequenzgang des unbeschalteten HB-S # 153922 Single-Coil Tonabnehmers und des HB-H # 153922 Humbuckers

In Abb.22 sieht man das Übertragungsverhalten des Single-Coil Tonabnehmers und des Humbuckers bei Verwendung der gemessenen elektrischen Kennwerte. Bei niedrigen Frequenzen bleibt das Signal unverändert. Ab etwa 1000 Hz steigt die Kurve und das Eingangssignal wird verstärkt. Bei der sogenannten Resonanzfrequenz, die beim SC TA etwa bei 7100 Hz und beim Humbucker bei 4600 Hz liegt, ist das Maximum der Kurve. Dann fällt die Verstärkung beim SC TA bis zu etwa 10000 Hz wieder auf 1 ab. Beim Humbucker wird die Verstärkung 1 schon bei 6000 Hz wieder erreicht. Höhere Frequenzen werden dann jeweils abgeschwächt, umso stärker sie sind. Dieses Verhalten wird auch als "Tiefpass 2. Ordnung" bezeichnet [21]. Dass heißt, tiefe Frequenzen werden unverändert durchgelassen, Frequenzen im Bereich der Resonanzfrequenz werden verstärkt und hohe Frequenzen werden unterdrückt.

Neben der Amplitude verändert der Tonabnehmer auch die Phase des Signals (s. Abb.23).

Abb. 23 zeigt, dass die Phasenverschiebung bei niedrigen Frequenzen sehr klein ist. Bei der Resonanzfrequenz beträgt sie -90° und für sehr hohe Frequenzen geht sie gegen -180°. Für das Ausgangssignal ist die Phasenverschiebung nicht ausschlaggebend, da vor allem sehr hohe Frequenzen betroffen sind, die das Signal nur sehr schwach verändern, weil sie meistens als Obertöne mit kleinen Amplituden auftreten. Auf das Klangspektrum und das Klangempfinden hat die Phase keinen Einfluss, da das menschliche Ohr die Phase nicht wahrnimmt [22]. Es können jedoch Einflüsse auf die Lautstärke eintreten, z.B. wenn der 1. oder 2. Oberton im Resonanzbereich liegt, wo die Phasenverschiebung -90 Grad beträgt, oder wenn die Amplitude eines Obertons weit jenseits der Resonanz durch die Phasenverschiebung von beinahe -180 Grad von einem Positvwert zu einem Negativwert wird.



Abb.23: Phasenverschiebung des HB-S # 153922 Single-Coil Tonabnehmers und des HB-H # 153922 Humbuckers

4.5 Effekte externer Beschaltung auf die Übertragungsfunktion

In der Gitarre sind neben dem Tonabnehmer noch andere elektrische Bauteile, wie der Ton- und Lautstärkeregler, eingebaut, die den Klang weiter beeinflussen. Außerdem muss man die Kapazität des Kabels, das die Gitarre mit dem Verstärker verbindet, berücksichtigen. Laut Lemme [1], S.112 kann die Kapazität des Kabels ein Mehrfaches der Kapazität im Tonabnehmer betragen und den Klang somit stark beeinflussen. Die Regler und der Eingangswiderstand des Verstärkers wirken als weitere ohmsche Belastung. Um den Einfluss dieser Bauteile auf das Ausgangssignal zu veranschaulichen, wurde ein zusätzlicher ohmscher Widerstand R_L parallel zur bisherigen Schaltung eingefügt und sein Wert variiert. Zur Berechnung kann man dazu einfach Gl. (46) verwenden, wenn man darin den Widerstand R_P durch den Widerstand $R_P \parallel R_L$ ersetzt.

In Abb.24 ist die Auswirkung weiterer ohmscher Belastungen auf die Übertragungsfunktion veranschaulicht. Mit zunehmendem Lastwiderstand wird die Resonanzüberhöhung verstärkt, die Lage der Resonanzfrequenz bleibt aber gleich. Das Maximum der Übertragungsfunktion nähert sich mit zunehmendem Lastwiderstand immer mehr dem Wert des unbelasteten Tonabnehmers an, da bei einer Parallelschaltung der Gesamtwiderstand stets kleiner als der der Einzelwiderstände ist. Abb.25 zeigt das Verhalten der Übertragungsfunktion bei Variation der ohmschen Last noch etwas deutlicher.
Ohmsche Last am Tonabnehmer



Abb.24: Einfluss eines externen ohmschen Lastwiderstands auf die Übertragungsfunktion berechnet mit den Kennwerten des vermessenen Harley-Benton Single-Coil Tonabnehmers



Abb.25: Einfluss von zusätzlichen Lastwiderständen von 50 bis 1000 kOhm auf den Frequenzgang als Liniendiagramm

In Abb.25 kann man gut erkennen, dass sich das Verstärkungsmaximum ein wenig in den Bereich niedrigerer Frequenzen verschiebt, umso kleiner der Lastwiderstand ist. Außerdem wird die Verstärkung immer schwächer und verschwindet dann sogar ganz. Durch Leiserdrehen des Lautstärkereglers einer Gitarre kann man auch in der Praxis deutlich hören, dass die Höhen abgeschwächt werden.

Auf die gleiche Art kann der Einfluss der Kapazität auf das Ausgangssignal dargestellt werden, indem man die Kapazität in Gl. (46) variiert, da die Lastkapazität zur Tonabnehmerkapazität parallel liegt und sich daher zur Tonabnehmerkapazität dazu addiert.



Abb.26: Einfluss einer zusätzlichen Lastkapazität C_L auf die Übertragungsfunktion berechnet mit den Kennwerten des vermessenen Harley-Benton Single-Coil Tonabnehmers

In Abb.26 sieht man, dass das Resonanzmaximum durch zunehmende Lastkapazität in den Bereich kleinerer Frequenzen verschoben wird. Die Höhe der maximalen Verstärkung erhöht sich dabei ebenfalls. Das ist deutlicher in Abb. 27 zu sehen.



Abb.27: Einfluss der externen Lastkapazität als Liniendiagramm für Kapazitäten von 100 bis 700 pF

Durch beabsichtigtes Hinzuschalten von kapazitiven Widerständen kann man den Ton so gezielt verändern. Da die hohen Frequenzen dadurch zunehmend wegfallen, wird der Klang der Gitarre weicher und satter. Im Folgenden wird das auch noch ausprobiert und überprüft. Laut Lemme [1], S. 111 liegt die Resonanzfrequenz in Verbindung mit durchschnittlichen Kabeln zwischen 2 und 5 kHz. Für den Klangeindruck der unterschiedlichen Resonanzfrequenzen gibt Lemme folgende Beschreibungen:

- um 1.5 kHz: sehr weich aber noch nicht dumpf
- um 2 kHz: fett, bluesig
- um 2.5 kHz: warm voll
- um 3 kHz: brilliant, typisch neuer Gibson-Humbucker
- um 4 kHz: metallisch, hart, typisch Fender
- 5 bis 6 kHz: sehr hart, spitz
- 7 kHz oder mehr: glashart

4.6 Einfluss der Kabelkapazität

Am Beispiel eines Fender Stratocaster Tonabnehmers und einer unbelasteten Resonanzfrequenz von 10,23 kHz zeigt Lemme den großen Einfluss der Kabelkapazität auf. Wie man in Tab.5 sieht, kann die Resonanzfrequenz dabei bis auf ein Drittel absinken.

Aus Tab.5 wird ersichtlich, dass die Kabelkapazität für den Klang eine große Rolle spielt. Daher habe ich die Kapazität der Gitarrenkabel, die ich verwende, mit einem Digitalmultimeter Voltcraft 350 E gemessen, um sie bei den weiteren Schritten des Gitarrenbaus mit einberechnen zu können. In Tab.6 sind die Ergebnisse dargestellt.

Externe Kapazität (pF)	Gesamtkapazität (pF)	Resonanzfrequenz (kHz)				
0	110	10.23				
300	440	5.12				
470	580	4.46				
680	790	3.82				
1000	1110	3.32				
Tab.5: Kabelkapazität nach Lemme [1], S.113						

Aus Tab.6 sieht man, dass die Länge des Kabels die Kapazität beeinflusst. Je länger das Kabel ist, desto höher ist die Kapazität. Das hochwertige Gitarrenkabel ist im Vergleich zum gleichlangen normalen Instrumentenkabel besser isoliert und hat daher eine niedrigere Kapazität. Da der Klang der Gitarre durch das Kabel möglichst wenig verfälscht werden sollte, sind Kabel mit geringer Kapazität besser.

Kabeltyp	Kapazität (pF)				
Effektgerätverbindungskabel (0.15 m)	60				
Einfaches Instrumentenkabel (3 m)	370				
Einfaches Instrumentenkabel (6 m)	850				
Hochwertiges Gitarrenkabel (6 m)	640				
Tab.6: Gemessene Kapazität verschiedener Gitarrenkabel (Messfehler \pm 3 %)					

Um die oben genannten von der Resonanzfrequenz abhängigen Sounds zu erhalten, kann man in die Gitarre selbst zusätzliche Kondensatoren einbauen, die mit einem Drehschalter ausgewählt werden können. Nach Caspari [19] kann man die Resonanzfrequenz mit der Thompson'schen Schwingkreis-Formel abschätzen.

$$f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{ges}}} \qquad (47)$$

Die Gesamtkapazität C_{ges} setzt sich aus der Kapazität des Tonabnehmers, des Kabels und des zusätzlichen Kondensators zusammen.

$$C_{ges} = C + C_G + C_k \tag{48}$$

Durch Umformen und Einsetzen für C_{ges} erhält man die Zusatzkapazität C_k die man braucht, um eine beliebige Resonanzfrequenz f_R einzustellen.

$$C_k = \frac{1}{4\pi^2 f_R^2 L} - C - C_G \qquad (49)$$

Wenn man das hochwertige Gitarrenkabel (640 pF) und den Harley Benton HB-S # 153922 Single-Coil Tonabnehmer (130 pF) verwendet, ergibt sich als maximale Resonanzfrequenz durch Einsetzen in die Thompson'sche Schwingkreis-Formel etwa 3 kHz. Bei logarithmischer Einteilung des Gebiets von 1 bis 3 kHz in 9 Stufen ergeben sich die in Tab.7 angegebenen Resonanzfrequenzen und Kondensatoren.

Resonanzfrequenz	1000	1116	1245	1389	1551	1731	1932	2156	2685
(Hz)									
Zusatzkapazität	5895	4582	3527	2680	2000	1454	1016	664	154
(pF)									
Tab.7: Kapazitätstabelle für C_k									

4.7 Gesamt-Übertragungsfunktion vom Tonabnehmer zum Verstärkereingang

Um die mit Zusatzkondensatoren möglichen Klangvarianten umzusetzen, wird zur üblichen Beschaltung des Tonabnehmers (Klangregler, Lautstärkeregler) ein Kapazitätswahlschalter hinzugefügt.



Abb.28: Beschaltung des Tonabnehmers mit Kapazitätswahlschalter

Aus diesem Schaltbild kann man nun das Ausgangssignal der Gitarre berechnen. Um die Rechnung zu vereinfachen, fasst man parallele Bauteile geeignet zusammen.



Abb.29: Vereinfachtes Ersatzschaltbild des Tonabnehmers mit Kapazitätswahlschalter (Kabelkapazität C_G und Verstärker-Eingangswiderstand R_V berücksichtigt)

In Abb.29 werden zur Vereinfachung der Rechnung geeignete Widerstände in den Hilfsgrößen Z_1 , Z_2 und Z_3 zusammengefasst. Für diese Hilfsgrößen bekommt man unter Verwendung der Rechenregeln für die Serien- und Parallelschaltung von Widerständen

$$Z_{1} = R + j\omega L \quad (50)$$

$$Z_{2} = \frac{1}{j\omega(C + C_{k}) + \frac{1}{R_{P}} + \frac{1}{R_{1} + R_{2}}} \quad (51)$$

$$Z_{3} = \frac{1}{\frac{1}{R_{V}} + j\omega C_{G}} \quad (52)$$

Zur Berechnung des Gesamtfrequenzgangs werden die Kirchhoffschen Gesetze verwendet. Dreimalige Verwendung der Maschenregel liefert

$$U_{i} = Z_{1}I_{1} + Z_{2}I_{2}$$
(53)
$$Z_{2}I_{2} = R_{31}I_{3} + R_{32}I_{5}$$
(54)
$$R_{32}I_{5} = I_{4}Z_{3} = U_{a}$$
(55)

Zweimalige Verwendung der Knotenregel gibt

 $I_1 = I_2 + I_3$ (56) $I_3 = I_4 + I_5$ (57)

Durch Eliminieren aller Ströme erhält man aus diesen Gleichungen die Übertragungsfunktion

$$\frac{U_a}{U_i} = \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \left[R_{31}\left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{R_{32}}\right) + 1\right] + Z_1\left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{R_{32}}\right)\right]}$$
(58)



b)

a)



Abb.30: Übertragungsfunktion der Gitarre mit Kabel und Verstärker (Verstärkereingangswiderstand 1 MOhm [11], Kabelkapazität 640 pF). a) Lautstärkeregler 98 % aufgedreht, b) Lautstärkeregler 80 % aufgedreht

In Abb.30 sieht man die gesamte Übertragungsfunktion unter realistischen Bedingungen, bei der alle Bauteile inklusive Kabelkapazität und Verstärkereingangswiderstand berücksichtigt sind. Neben den Zusatzkondensatoren aus Tab.7 wurden für Lautstärkeregler R_3 und Klangregler R_1 jeweils ein Drehpotentiometer mit 500 kOhm verwendet. Der Festwiderstand R_2 betrug 47 kOhm. Wie zu erwarten verschiebt sich die Resonanzfrequenz durch die kapazitiven Widerstände nach links. Durch die ohmsche Belastung ist außerdem die maximale Verstärkung geringer. In Abb.30.b sieht man den Effekt des Lautstärkereglers, der auf 80% des Vollausschlags zurückgestellt wurde. Dadurch wird das Signal leiser und die Resonanz fällt teilweise weg und die Höhen werden herausgedämpft.

Dieser Höhenverlust ist unerwünscht, weil die Klangfarbe durch das Leiserdrehen ja nicht verändert werden soll, sondern nur die Lautstärke. Nach Koch [23] wurde deshalb in einige Gitarren der Firma Fender parallel zum Widerstand R₃₁, dem "oberen" Teil des Lautstärke-Potentiometers, ein zusätzlicher Kondensator C_F geschaltet. Weil für Kondensatoren der Wechselstromwiderstand mit zunehmender Frequenz abnimmt, bewirkt dieser Kondensator, dass die hochfrequenten Signalanteile parallel zu R₃₁ über diesen Kondensator an den Gitarrenausgang gelangen. Die Übertragungsfunktion lautet dann

$$\frac{U_a}{U_i} = \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \left[Z_4 \left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{R_{32}}\right) + 1\right] + Z_1 \left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{R_{32}}\right)\right]}$$
(59)

mit

$$Z_4 = \frac{1}{\frac{1}{R_{31}} + \omega C_F}$$
(60)

Um zu überprüfen, ob das auch in der Schaltung von Abb.28 Vorteile bringt, wurde eine Vergleichsrechnung mit einem derartigen Kondensator (Kapazität 1 nF) durchgeführt. Abb.31 zeigt das Resultat, wobei man eine deutliche Höhenanhebung gegenüber Abb. 30b erkennen kann. Deshalb wurde diese Korrektur auch in die Selbstbaugitarre eingebaut.





4.8 Ausgangssignal der Gitarre und Frequenzspektren am Verstärkereingang

Zur Weiterverfolgung der mechanischen Schwingung über der Tonabnehmerposition wurde angenommen, dass sie im Tonabnehmer ein entsprechendes Spannungssignal hervorruft, das im Prinzip eine ähnliche Form und Zeitabhängigkeit wie das mechanische Signal besitzt. Nach dem Induktionsgesetz ist die induzierte Spannung bei Änderung eines Magnetfelds um eine Spule zur Änderungsrate des magnetischen Flusses proportional und nicht zum Fluss selber [24]. Das bedeutet für den Tonabnehmer, dass nicht die Auslenkung der Saite an der Tonabnehmerposition, sondern die Geschwindigkeit der Saite ausschlaggebend ist, wie es auch Helmuth Lemme in seinem Buch schreibt (s. [1], S. 105). Eine genaue Berechnungsformel für die induzierte Spannung wird von McDonald [25] angegeben. Darin wird die Saitenbewegung senkrecht und parallel zum Korpus berücksichtigt, wobei sich zeigt, dass die Bewegung senkrecht zum Korpus den Hauptanteil der Spannungsinduktion bewirkt. Bei Vernachlässigung der Parallelbewegung gilt für die induzierte Spannung U_{ind}

$$U_{ind} = C \dot{w} \tag{60}$$

In der Konstanten C sind die Magnetfeldstärke, der Saitendurchmesser, die relative Permeabilität des Saitenmaterials und geometrische Konstanten wie Abstand der Saiten und Spulenabmessungen enthalten.

Weil die Saitenauslenkung w als Summe von Cosinusschwingungen darstellbar ist (s. Gl. (33)), kommt durch die Ableitung nach der Zeit ein zusätzlicher Frequenzfaktor $\omega_k = k\omega_0$ hinzu.

$$U_{ind} = -C \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot k\omega_0 \cdot \sin(k\omega_0 t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$
(61)

Das gilt für alle Punkte x der Saite im Bereich des Tonabnehmers. Weil der Tonabnehmer aber eine gewisse Ausdehnung in x-Richtung (Saitenrichtung) besitzt (sogenannte magnetische Apertur nach [1], S. 134), liefern alle Punkte dieses Bereichs Beiträge. Um das zu berücksichtigen, wurde das akustische Signal nochmals räumlich gemittelt, d.h. über die Tonabnehmerbreite b integriert. Dann bekommt man für die an der Tonabnehmerposition L/M induzierte Spannung unter Verwendung der Formel für die Differenz zweier Cosinus-Funktionen (s. [26], S. 157)

$$\overline{U_{ind}} = -C \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot k\omega_0 \cdot \sin(k\omega_0 t) \frac{1}{b} \int_{\frac{L}{m}(1+\frac{bm}{2L})}^{\frac{L}{m}(1+\frac{bm}{2L})} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx$$

$$= -C \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot k\omega_0 \cdot \sin(k\omega_0 t) \frac{L}{bk\pi} \left[\cos\left(\frac{k\pi(1+\frac{bm}{2L})}{m}\right) - \cos\left(\frac{k\pi(1-\frac{bm}{2L})}{m}\right) \right]$$

$$= -C \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \frac{2L\omega_0}{b\pi} \cdot \sin(k\omega_0 t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{m}\right) \cdot \sin\left(k\pi\frac{b}{L}\right) \quad (62)$$

Wegen der Integration wird wieder durch einen zur Frequenz proportionalen Faktor k dividiert und der Frequenzeffekt durch die Flussänderung hebt sich heraus. Auch von der Grundfrequenz besteht keine Abhängigkeit mehr, da $\frac{L\omega_0}{\pi} = \sqrt{S/(A\rho)}$ ist (s. Gl. (21)). Durch den neuen Term

 $sin\left(k\pi\frac{b}{L}\right)$ kommen allerdings zusätzliche Auslöschungen hinzu, die aber meist außerhalb des Hörbereichs liegen, weil b/L klein ist (0.02 bis 0.04) und sie erst beim 25-ten bis 50-ten Oberton wirksam werden. Die zusätzlichen Auslöschungen durch die Tonabnehmerbreite in Saitenrichtung (s. [1], S.134) werden auch in [27,40] beschrieben und können mit der oben gezeigten Mittelung plausibel gemacht werden. Weil b/L klein ist, wirkt sich für k < 10 bis 20 der zusätzliche Term wieder wie ein zusätzlicher Faktor ω_k aus, weil dann der Sinus gleich seinem Argument gesetzt werden kann.

Um die Gesamt-Übertragungsfunktion der E-Gitarre zu erhalten, wird nun noch die in Gl. (59) berechnete elektrische Übertragungsfunktion von Tonabnehmer und Beschaltung als weiterer Faktor zu den einzelnen Summentermen der Lösung der Wellengleichungen dazugegeben. Das ist wegen der Gültigkeit des Überlagerungsprinzips für Spannungen in passiven RLC-Netzwerken erlaubt (s. [28], S. 144). Die Addition der Teillösungen ergibt dann die Gesamtlösung für das Ausgangssignal $U_v(t)$ der Gitarre am Verstärkereingang bei Anzupfung an der Stelle L/n und Tonabnehmerposition L/m

$$U_{\nu}(t) = C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_a}{U_i}(\omega_k) \left[\frac{2Hn^2}{(n-1)k^2\pi^2} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{m}\right) \cdot \sin\left(k\pi\frac{b}{L}\right) \right] \cdot \sin(\omega_k t)$$
(63)

Die drei Sinus-Terme in Gl. (63) enthalten die verschiedenen Auslöschungen von Obertönen (Anzupfposition, Tonabnehmerposition, Tonabnehmerbreite). Wegen der von ihnen verursachten kammförmigen Gestalt der Amplitudenspektren (s. Abb. 33) werden sie auch als Kammfilter bezeichnet (s. [27]). Die Übertragungsfunktion $\frac{U_a}{U_i}(\omega_k)$ enthält Amplitude und Phasenverschiebung.

Beim später durchgeführten Vergleich mit den Messungen zeigte sich, dass diese Beziehung zu Beginn der Messung am Anfang der Saitenschwingung gut passt, beim Vergleich zu späteren Zeitpunkten zeigte sich aber eine deutliche Überschätzung der Amplituden. Die hängt vermutlich mit der Vernachlässigung der Dämpfung zusammen. Diese ist nach [15] von der Frequenz abhängig und daher auch für die Oberschwingungen stärker als für die Grundschwingung. Um das im Prinzip zu



c)

Ausgangssignal bei Anregung bei L/10 und Abnahme bei L/4



Abb.32: Ausgangssignal, Grundschwingung und die ersten sieben Oberschwingungen bei einer Frequenz von 330 Hz am Gitarrenausgang. a) $C_k = 0 \ pF$, b) $C_k = 2000 \ pF$, c) $C_k = 5895 \ pF$

berücksichtigen, wurde gegebenenfalls ein einfacher frequenzabhängiger Dämpfungsfaktor der Form $\frac{1}{\omega_k}$ verwendet. Diese Art der Dämpfung ist nicht exakt, aber eine einfache Möglichkeit den Dämpfungseffekt im Prinzip zu erfassen. In den allermeisten Fällen wurde aber mit der noch weitgehend ungedämpften Anfangsphase des Klangs verglichen, wo Gl. (63) noch gültig ist.

In Abb.32 sind die Auswirkungen der Zusatzkondensatoren bei einem Ton von 330 Hz, Anzupfstelle bei L/10 und Tonabnehmer bei L/4 auf das Ausgangssignal zu sehen. Um die Auswirkung möglichst deutlich zu zeigen, wurde bei a) keiner, bei b) der mittlere und bei c) der maximale Kapazitätswert gewählt. In Abb.33 sieht man die dazugehörigen Frequenzspektren. Die grünen Kreise markieren die Spektralamplituden der Eigenfrequenzen vor dem Tonabnehmer, die vom akustischen Signal kommen. Die roten Dreiecke bezeichnen die Amplituden des Ausgangsignals der Gitarre, worin sich die Auswirkungen der Tonabnehmereigenschaften und der elektrischen Beschaltung niederschlagen. Weiter sind noch als Hilfskurven die Auslöschungskurven (Kammfilter) von Anzupfstelle, Tonabnehmerposition und magnetischer Apertur des Tonabnehmers eingezeichnet.

In Abb.32.a sieht man sehr deutlich, dass es sich beim Ausgangssignal um die Ableitung des Signals über dem Tonabnehmer handelt. Wenn sich die Saite über dem Tonabnehmer nicht bewegt, ändert sich das Magnetfeld nicht und es wird keine Spannung induziert. Erst wenn sich die Saite bewegt, wird im Ausgangssignal ein Spannungsimpuls erzeugt. Durch das Induktionsgesetz ist das Vorzeichen dabei umgedreht. Die annähernd rechteckige Form des Eingangssignals ergibt sich durch die vielen schwachen hochfrequenten Oberschwingungen. Da diese durch die elektrische Übertragungsfunktion abgeschwächt werden, ist das Ausgangssignal eher abgerundet. In Abb.32.b/c werden die Obertöne durch den Zusatzkondensator immer stärker abgeschwächt. Dadurch ist das Signal abgerundet, die höheren Obertöne sind kaum ausschlaggebend und die Bereiche konstanter Signalhöhe im Einganssignal können im Ausgangssignal nicht mehr abgebildet werden. In Abb.33.c sieht man, dass nurmehr die Grund- und die ersten zwei Oberschwingungen verstärkt werden, die anderen Obertöne werden durch die Übertragungsfunktion so stark abgeschwächt (Faktor 10), dass sie das Ausgangssignal nicht mehr ausschlaggebend beeinflussen. Bei den Spektrallinien des Ausgangssignals in Abb. 33 kann man gut erkennen, dass sie im Resonanzbereich gegenüber den akustischen Werten angehoben sind und danach durch die Tiefpasswirkung des Tonabnehmers abgeschwächt werden.

In den bisherigen Arbeitsschritten wurde aufgrund der physikalischen Gesetze ein mathematisches Modell für das Ausgangssignal einer E-Gitarre mit Single-Coil Tonabnehmer berechnet. Dieses Signal wird durch einen Gitarrenverstärker noch weiter modifiziert und verstärkt. Letztlich wird die Membran des Lautsprechers durch die Wechselspannung in Schwingung versetzt und als Schallwelle abgestrahlt. Erst dadurch wird das elektrische Signal aus der E-Gitarre für das menschliche Ohr wahrnehmbar.

Bevor die Ergebnisse des Rechenmodells mit Messungen von Klangspektren verglichen werden, wird im nächsten Kapitel die mechanische Belastung der Gitarre behandelt. Dannach wird der Bau einer E-Gitarre beschrieben, die als Besonderheit die Verstellung der Tonabnehmer erlaubt und einen Kapazitätswahlschalter zur Verschiebung der Resonanzfrequenz besitzt.



Abb.33: Spektralanalyse des Ausgangssignals bei einer Frequenz von 330 Hz. a) $C_k = 0 \ pF$, b) $C_k = 2000 \ pF$, c) $C_k = 5895 \ pF$

5 Mechanik

Um die Saiten der Gitarre auf die Grundtöne (Eine Alte Dame geht heute einkaufen) zu stimmen, muss die entsprechende Spannkraft eingestellt werden. Dazu dienen die Wirbel oder auch Mechaniken der Gitarre (s. Abb.34). Diese bestehen aus einem Schneckengetriebe mit einem Übersetzungsverhältnis von 1:12 bis 1:16 [29], das an der Kopfplattte angebracht ist. Durch Drehen an einem am Schneckenrad befestigten Wirbel kann man so die Saite spannen. Das Schneckengetriebe ist so dimensioniert, das es selbsthemmend ist, das heißt es kann durch den Saitenzug nicht rückwärts gedreht werden. Das Schneckenrad treibt über ein Zahnrad die eigentliche Spannvorrichtung an. Diese besteht aus einem Metallbolzen mit einem Loch, durch das die Saite geführt wird. Durch mehrfache Umwicklung des Bolzens wird die Reibungskraft so hoch, dass sie die Saite hält, bzw. es wird die am freien Ende benötigte Haltekraft so klein, dass sie durch Drunterklemmen des Drahtendes unter die Wicklungen bzw. durch Verkanten des Drahtendes in der Querbohrung des Bolzens aufgebracht werden kann. Nach [30] gilt für die Seilkraft S als Bedingung für einsetzende Bewegung (Ende der Haftreibung)

$$S < S_h e^{\mu \varphi} \tag{64}$$

Daraus berechnet sich die notwendige Haltekraft S_h am freien Ende bei zweifacher Umwicklung, einem Reibungsbeiwert von 1 (Mittelwert aus Materialpaarung Nickel/Nickel und Stahl/Stahl nach [31]) und einem Saitenzug von etwa 70 N zu $S_h = 0.13$ N, was sehr wenig ist.



Abb.34: a) Schneckengetriebe [32] und b) Anwendung bei einer Bassmechanik der Firma Schaller [33]

5.1 Berechnung der Saitenspannung

Die Spannkraft S der Saiten kann man aus der Gleichung für die Eigenfrequenzen der Saitenschwingung berechnen, wenn man i=1 (Grundschwingung f_0) einsetzt.

$$S = 4f_0^2 L^2 A \rho \tag{65}$$

Aus dieser Gleichung wird ersichtlich, dass die Spannkraft quadratisch mit der Frequenz und der Saitenlänge L und linear mit Querschnittsfläche A und Dichte ρ des Saitenmaterials zunimmt. Wenn man die Saitendurchmesser und die dazugehörigen Frequenzen der Grundtöne einsetzt, erhält man die Saitenkräfte (s. Tab.8).

Grundton	Frequenz	Durchmesser		Kern-	Wicklungs-	Durchmesser	Spannkraft
		(nominell)		durchmesser	durchmesser	(effektiv)	(berech.)
	[Hz]	[Zoll]	[m]	[m]	[m]	[m]	[N]
е	330	0.010	0.000254	-	-	0.000254	70.1
h	247	0.013	0.000330	-	-	0.000330	66.4
g	196	0.017	0.000432	-	-	0.000432	71.5
D	147	0.026	0.000660	0.00038	0.00014	0.000611	80.4
А	110	0.036	0.000914	0.00042	0.00025	0.000838	84.8
E	82	0.046	0.001168	0.00048	0.000344	0.001059	75.2
Tab.8: Saitenkenndaten für Fender ST250R-Saitensatz und berechnete Spannkraft							

Verwendet man bei der Berechnung der Spannkraft die nominellen Durchmesser der Saiten, ergeben sich Kräfte von 66 bis 100 N (kreisförmige Symbole in Abb.36). Die Kräfte für die drei tiefen Saiten sind dabei deutlich höher als die der drei hohen Saiten. Beim nominellen Durchmesser wird jedoch nicht berücksichtigt, dass die tiefen Saiten umwickelt sind und dadurch Hohlräume entstehen (s. Abb.35).



Abb.35: Skizze zur Berechnung des effektiven Saitendurchmessers

In [34] wird dafür ein Korrekturfaktor angegeben, der aber ungenau ist, da er flächenbasiert und nicht volumenbasiert berechnet wurde. Da die Wellengleichung mit der Masse der Saite rechnet, kann man die umwickelte Saite in eine Vollsaite mit gleicher Masse (und daher gleichem Volumen) mit einem effektivem Durchmesser D_{eff} umrechnen. Nach Abmessen des Durchmessers des Saitenkerns D_K und Berechnung des Wicklungsdurchmessers D_W aus dem Gesamtdurchmesser kann man das Gesamtvolumen der umwickelten Saite als Torus und einen sich darin befindenden Zylinder darstellen. Dieses Volumen muss dem Volumen der Saite mit effektivem Durchmesser entsprechen. Daraus erhält man

$$D_{eff} = \sqrt{D_K^2 + \pi D_W (D_K + D_W)}$$
(66)

Die mit dieser Formel berechneten Kräfte sind als Kreuze in Abb.36 eingezeichnet. Man sieht dass die Kräfte der unterschiedlichen Saiten dadurch gleichmäßiger sind, was gut für eine Gleichheit der Belastung ist. Als gesamte Zugkraft ergibt sich aus der Rechnung 448.3 N. Das passt gut dem in [29], S. 27 angegeben Wert von 457 N, der für einen sehr ähnlichen Saitensatz (A-Saite .035 statt .036 Zoll) angegeben wird. Diese Kraft wird auf die Kopfplatte und den Korpus übertragen und versucht den Hals durchzubiegen, weshalb dieser entsprechend stabil ausgeführt werden muss.



Abb.36: Zusammenhang zwischen Spannkraft, Durchmesser und Frequenz der Saite. Kreissymbole: Berechnung mit nominellem Durchmesser, Kreuzsymbole: Berechnung mit effektivem Durchmesser

5.2 Durchbiegung des Halses

Um den Zusammenhang zwischen Halsbiegung und den am Gitarrenhals wirkenden Kräften und Momenten zu finden, kann man die Gesetzmäßigkeiten der technische Biegelehre verwenden (s. [30], S. 75). Dort wird nach Abb.37 ein Momentengleichgewicht an einem Balkenstück betrachtet, das sich kreisbogenförmig durchbiegt. Dabei wird das Balkenstück außen gedehnt und innen gestaucht. Dadurch entstehen in den jeweiligen Querschnittsabschnitten Zug- und Druckkräfte, die man mit dem Hookschen Gesetz über den Elastizitätsmodul aus den geometrisch gegebenen

Dehnungen berechnen kann. Dem äußeren Moment M muss dann die Summe aller Momente der inneren Teilkräfte das Gleichgewicht halten.



Abb.37: Skizze zur Balkenbiegung mit konstantem Biegemoment und Momentengleichgewicht an einem kleinen Balkenstück [30], S. 75

Die Biegelinie lässt sich schließlich aus dem Momentengleichgewicht am Balkenelement nach [30], S. 81 mit der folgenden Differentialgleichung berechnen.

$$w'' = \frac{M}{E \cdot I_y} \tag{67}$$

In der Formel bezeichnet w die Auslenkung, M das Biegemoment, E den Elastizitätsmodul und I_y das Flächenträgheitsmoment. Für das Flächenträgheitsmoment ergibt sich nach [30], S. 72 unter der Annahme, dass der Hals eine dreieckige Form hat

$$I_y = \frac{bh^3}{36} \tag{68}$$

wobei h die Höhe und b die Breite des Dreiecks ist (s. Abb.40).

Wenn man annimmt, dass die Summe der Saitenkräfte S_{ges} unmittelbar am Sattel angreift, ergibt sich ein konstantes Biegemoment der Größe

$$M = (h_s + s)S_{ges} \tag{69}$$

Dabei bezeichnet s den Abstand der Saiten zum Hals und h_s ist der Abstand von der Griffbrettoberfläche zum Flächenschwerpunkt des Querschnitts. Für ein gleichseitiges Dreieck gilt die Formel

$$h_s = \frac{1}{3}h \qquad (70)$$

In Abb.38 sind die Kräfte, die am Hals angreifen , und der Biegemomentenverlauf genauer gezeigt. Der Momentenverlauf ergibt sich daraus, dass man einen Schnitt entlang der x-Achse in den Hals legt und dort jeweils das Moment aus dem Produkt aus Kraft mal Weg ausrechnet. Es gibt drei Beiträge. Zunächst wirkt am Punkt, wo die Saite am Hals auf der Kopfplatte befestigt ist, die Saitenkraft mit dem Hebelarm f. Dazu wirkt an derselben Stelle der Beitrag der Normalkraft S_N an der Position des Wirbels. Der wächst proportional zum Abstand L_H +a-x an, bis dann ein genau entgegengesetzt drehendes Moment von der Normalkraft - S_N am Sattel auftritt, das mit dem Abstand L_H -x abfällt. Ab diesem Punkt heben sich die Beiträge der Normalkraft auf und es bleibt ein konstantes Biegemoment übrig, wie es in Gl. (69) angegeben ist. Die Saitenkraft S am Sattel übt kein Moment aus, da die Saite dort nicht fixiert ist. Insgesamt bekommt man für den Momentenverlauf

$$M = \begin{cases} S_N \cdot (L_H + a - x) - S \cdot f & \text{für } x > L_H \\ S \cdot (s + h_S) & \text{für } x \le L_H \end{cases}$$
(71)

Weil für das Spielen nur die Biegung bis zur Saitenauflage wichtig ist, wird der Bereich hinter dem Sattel für die Ausrechnung der Biegung nicht beachtet.



Abb.38: Kräfte am Hals und Verlauf des Biegemoments entlang des Halses

Da in Gl. (67) die zweite Ableitung vorkommt, muss diese noch zweimal integriert werden. Um die Schreibweise zu vereinfachen , setzt man die Hilfsgröße A zu

$$A = \frac{M}{E \cdot I_y} \qquad (72)$$

Nach einmaligem Integrieren erhält man für die Steigung der Biegelinie

$$w' = \int A \, dx = Ax + c \tag{73}$$

Integriert man ein zweites Mal, ergibt sich die Gleichung für die Biegelinie

$$w = \int (Ax + c)dx = A\frac{x^2}{2} + cx + d$$
(74)

Um die unbekannten Integrationskonstanten c und d zu berechnen, kann man die Randbedingungen an der Halseinspannung verwenden. Dort muss sowohl die Auslenkung als auch die Tangentensteigung null sein.

$$w(0) = 0$$
 (75)
 $w'(0) = 0$ (76)

Daraus folgt, dass beide Konstanten c und d null sind und es ergibt sich

$$w(x) = A\frac{x^2}{2} \qquad (77)$$

Wenn man die Hilfsgröße A wieder einsetzt, bekommt man für die Biegelinie eine Ursprungsparabel der Form

$$w(x) = \frac{M}{2E \cdot I_y} x^2 \qquad (78)$$

Durch weiteres Einsetzen des Trägheitsmoments und des Schwerpunktabstands des Dreiecks erhält man für die Biegelinie im Fall eines Dreiecksquerschnitts



 $w(x) = \frac{6(h+3s)S_{ges} x^2}{E \cdot bh^3}$ (79)

Abb.39: Biegung des Halses bei unterschiedlichen Bedingungen für einen dreieckigen Halsquerschnitt für Eiche und Ahorn bei verschiedenen E-Modul-Werten (s. Tab.9)

Abb.39 zeigt die Biegelinie des Halses für verschiedene Materialien und für zwei Gitarrenhälse mit unterschiedlichen Maßen. In allen Fällen wurde der Dreiecksquerschnitt verwendet. Der erste Hals gehört zur selbstgebauten Gitarre aus Eichenholz mit einer typischen Breite von 4.2 cm und einer Höhe von 3.2 cm. Der andere Gitarrenhals gehört zu einer Yamaha Pacifica und ist aus Ahorn gefertigt. Dieser ist am Steg 4.1 cm breit und 2.2 cm hoch. Die Verdickung und Verbreiterung des Halses in Richtung Korpus wurde bei dieser Berechnung allerdings nicht berücksichtigt. Die Werte für den Elastizitätsmodul wurden aus dem Holzatlas [35] entnommen. Darin ist für jede Holzart ein typischer Wert und außerdem eine Ober- und Untergrenze für den Elastizitätsmodul angegeben. Die daraus folgenden Auswirkungen für die Belastbarkeit wurden in den obigen Berechnungen berücksichtigt. Die Maximalbiegung liegt zwischen 1 mm beim Eichenhals und etwa 4 mm für den Hals aus Ahorn. Der letzte Wert ist sehr hoch, aber auch nicht realistisch, da die Querschnittsform eher D-Förmig ist und bei fast allen käuflichen E-Gitarren ein Stahlstab in den Hals eingebaut ist, der den Hals weiter versteift. Mit diesem Stahlstab kann man die Biegung des Halses verändern und auf die gewünschte Neigung einstellen. Bei der selbstgebauten Gitarre wurde auf diesen Stahlstab verzichtet, da dies den Bau erleichtert hat. Um das zu kompensieren, habe ich den Hals etwas dicker ausgeführt. In Abb.39 haben die drei Kurven des Eichenhalses dementsprechend die geringsten Durchbiegungen. Je größer der E-Modul ist, desto geringer ist bei den drei untersten Kurven für Eiche die Durchbiegung. Dasselbe kann man für die Variation des E-Moduls beim Ahornhals beobachten. Wegen der größeren Bandbreite der E-Modulwerte für Ahorn ist die Spreizung hier größer. Schließlich ist noch eine Vergleichskurve für den Eichenhals mit der geringeren Dicke der Yamaha Pacifica eingetragen. Damit wird auch der Eichenhals soweit durchgebogen, dass er im Bereich der Yamaha-Pacifica mit Ahornhals liegt.

	Selbstgeb	aut	Yamaha Pacifica			
	Korpus	Kopfplatte	Werte für Abb.39	Werte für Abb.39		
Halsbreite b [m]	0.0575	0.0415	0.042	0.041		
Halshöhe h [m]	0.0325	0.0290	0.032	0.022		
Steghöhe s [m]	0.0022		0.0022			
Länge des Halses L _H [m]	0.384			0.405		
Elastizitätsmodul E [MN/m ²] mit Ober- und Untergrenze des Streubereichs	10000 1	1700 13200	6400 9600 15200			
Tab.9: Abmessungen und Werkstoffkennwerte für die Berechnung der Halsbiegung						

Ein Dreicksquerschnitt stellt eine starke Vereinfachung dar. Es gibt zwar einige Gitarren mit annähernd dreiecksförmigem Halsquerschnitt (was die Bespielbarkeit meiner Meinung nach aber um einiges verschlechtert), die Mehrzahl der Gitarrenhälse hat jedoch eher einen elliptischen oder parabolischen Querschnitt. Dadurch ändert sich wie in Abb.40 dargestellt das Flächenträgheitsmoment und der Abstand h_s . Die grundlegende Form der Biegelinie wird dadurch nicht verändert, das Ausmaß der Durchbiegung aber schon.



Abb.40: Verschiedene Querschnittsformen des Halses und dazugehörige Flächenträgheitsmomente und Abstände zur neutralen Faser nach [36]

Aus Abb.40 sieht man, dass das Flächenträgheitsmoment der verschiedenen Querschnittsformen sich nur durch einen Vorfaktor unterscheidet, der von Dreieck zu Parabel und Ellipse immer größer wird. Dadurch nimmt der Widerstand gegen Biegung immer mehr zu, weshalb ein Hals in elliptischer Form am günstigsten ist. Aus diesem Grund wurde auch für die selbstgebaute Gitarre ein elliptischer Querschnitt gewählt (ein weiterer Grund war aber auch der, dass man für den elliptischen Querschnitt am wenigsten Material vom Rechteckquerschnitt der Halsrohlings abnehmen musste).

5.3 Numerische Berechnung der Biegelinie bei elliptischem Querschnitt mit Verdickung

Um die Biegung des Halses realistischer zu berechnen, muss man die Änderung des Querschnitts beachten. Der Gitarrenhals wird in Richtung Kopfplatte linear schmäler und flacher. Für die selbstgebaute Gitarre ergeben sich für Breite und Höhe des Halses abhängig vom Abstand x zum Korpus folgende Formeln

$$h(x) = 0.0325 - \frac{0.0035}{L_H}x \qquad (80)$$
$$b(x) = 0.0575 - \frac{0.016}{L_H}x \qquad (81)$$
$$h_s(x) = 0.4244 h(x) \qquad (82)$$

Für die zweite Ableitung der Biegelinie erhält man durch Einsetzen der obigen Werte eine Differentialgleichung, die nur sehr mühevoll zu integrieren wäre.

$$w'' = \frac{(0.4244 h(x) + s)S_{ges}}{E \cdot 0.10976 b(x)h(x)^3}$$
(83)

Um der mühsamen Rechnerei mit Integralen zu entgehen, kann man die Biegelinie auch numerisch ermitteln. Dazu teilt man die Biegelinie in viele möglichst kleine Abschnitte ein (s. Abb.41) und bestimmt die Auslenkung nur an den dadurch entstandenen Hilfspunkten ($x_i | w_i$). Nun muss die zweite Ableitung durch die Stützstellen ausgedrückt werden.



Abb.41: Skizze zur Veranschaulichung der numerischen Lösung

Dazu berechnet man zuerst die erste Ableitung am Punkt i näherungsweise aus der Sekante

$$w'(x_i) = \frac{w_{i+1} - w_i}{\Delta x} \qquad (84)$$

Die zweite Ableitung kann man mit der Sekantenformel aus den ersten Ableitungen an den Stellen x_i und x_{i-1} berechnen. Dadurch erhält man

$$w''(x_i) = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2}$$
(85)

Durch Einsetzten in Gl. (83) und Auflösen nach w_{i+1} bekommt man

$$w_{i+1} = \left[\frac{(0.4244 h(x_i) + s)S_{ges}}{E \cdot 0.10976 b(x_i)h(x_i)^3}\right] \Delta x^2 + 2w_i - w_{i-1}$$
(86)

Wenn man die ersten beiden Werte hat, kann man daraus alle folgenden Werte der Biegelinie berechnen. Als Startwerte für die Berechnung gewinnt man aus den Randbedingungen $w_1 = w_2 = 0$.

Die Ergebnisse hängen dann von der Feinheit der Einteilung ab, die natürlich ausreichend klein sein muss.



Abb.42: Halsbiegung in Abhängigkeit der Querschnittsform für die selbstgebaute Gitarre

In Abb.42 sieht man noch einmal verschiedene Biegelinien des Halses für die Selbstbaugitarre aus Eichenholz. Die Kurven unterscheiden sich jeweils durch unterschiedliche Querschnittsformen. Man sieht , dass die Querschnittsform die Biegung stark beeinflusst. Die Dreiecksform hat die stärkste Durchbiegung und auch bei der parabolischen Halsform ist die Biegung noch groß. Wenn die Querschnittsform elliptisch ist, was der Realität am ehesten entspricht, ist die Biegelinie deutlich weniger gekrümmt. Wenn außerdem die Veränderung der Breite und Höhe des Halses berücksichtigt wird, ist die Krümmung noch geringer. Das Maximum liegt in diesem Fall, der der Realität am nächsten kommt, bei 0.1 mm (cyanfarbene Kurve). Die numerische Lösung , mit der diese Kurve ermittelt wurde, wurde mit einer Schrittweite von einem Hundertstel der Halslänge berechnet. Da das Ergebnis einer numerischen Lösung von der Diskretisierung (Einteilung in Schritte) abhängt, wurde die Rechnung noch mit einer feineren (1000 Schritte) und einer gröberen Diskretisierung (10 Schritte) durchgeführt. Die Rechnung mit 1000 Schritten zeigte keinen sichtbaren Unterschied zur Rechnung mit 1000 Schritten. Deshalb ist die im Bild gezeigte Kurve mit 100 Schritten ausreichend genau.

Weil die Saitenspannung beim Spielen durch das Anzupfen und den Schwingungsvorgang der Saite nach Betrag und Richtung leicht schwankt, ändern sich die Kräfte und Momente am Hals und Korpus, die dadurch auch zu Schwingungen angeregt werden. Die Saitenschwingung und die Korpusschwingung bilden daher ein gekoppeltes schwingungsfähiges System. Der Korpus und der Hals besitzen ebenfalls Resonanzfrequenzen, bei denen sie besonders leicht angeregt werden können. Dabei kann es passieren, dass Schwingungsenergie bei den entsprechenden Frequenzen aus der Saitenschwingung in den Korpus übergeht, weshalb diese Frequenzen besonders schnell abklingen. Das kann dazu führen, dass der Grundton schneller abklingt als die Obertöne, was meist den Klangeindruck verschlechtert (s. [1], S. 76 ff). Solche Stellen werden als Dead Spots bezeichnet und es ist ein Merkmal guter Gitarren, dass es keine solchen Dead Spots darauf gibt, was man durch Holzwahl, Formgebung und Art des Zusammenbaus der Einzelteile verhindern kann. Es gibt dann trotzdem noch Eigenfrequenzen des Korpus, die jedoch so gelegt sind, dass sie nicht mehr im Bereich der Grundschwingung liegen, sondern eher bei den Obertönen, wo sie weniger störend sind, sondern sogar positiv das gewisse Etwas eines Gitarresounds ausmachen können. Abb.43 zeigt die massiv verstärkt dargestellten Schwingungsformen von Hals und Korpus bei verschiedenen Resonanzfrequenzen.



Abb.43: Schwingungsformen einer E-Gitarre bei verschiedenen Resonanzfrequenzen nach [1], S. 79

6 Bau einer E-Gitarre

Um die ganzen in den vorigen Teilen der Arbeit gewonnenen Erkentnisse auch praktisch zu untersuchen, habe ich schon zu Beginn der Arbeit beschlossen, eine eigene Test-Gitarre zu bauen. Anfangs war der Plan eher, eine möglichst einfache Gitarre zu bauen, die nur die grundlegendsten Funktionen einer E-Gitarre besitzt, um den Aufwand möglichst gering zu halten. Die erste Überlegung, ein einfaches Holzbrett mit Saiten zu bespannen, habe ich dann aber doch schnell verworfen. Im Laufe des Baus habe ich immer mehr Zeit für Arbeitsschritte verwendet, die für die grundlegende Funktion der E-Gitarre nicht notwendig wären, aber die Bespielbarkeit der E-Gitarre erhöhen. Wenn man einmal damit angefangen hat, einige Teile der Gitarre schön und möglichst benutzerfreundlich zu gestalten, kann man damit nicht aufhören. So ist nach vielen Stunden Arbeit in unserer heimischen Kellerwerkstatt eine E-Gitarre entstanden, die einer "echten", gekauften Gitarre schön sehr ähnlich ist.

6.1 Detailierte Beschreibung des Gitarrenbaus

Die meisten Gitarren werden größtenteils aus Holz hergestellt. Dabei handelt es sich um besondere Klanghölzer, die gute Schwingungseigenschaften haben. Denn auch bei elektrischen verstärkten Instrumenten schwingt der Korpus mit und gibt diese Schwingungen auch auf die Saiten zurück. Vor allem das Holz langsam wachsender Bäume mit sehr dichten Jahresringen und einer daher hohen Dichte wird oft zum Bau von Instrumenten verwendet. Außerdem ist es wichtig, dass das Holz möglichst gerade wächst und nur wenig Äste hat. Klanghölzer werden oft jahrelang gelagert, damit das Holz austrocknet und sich nach der Bearbeitung nicht mehr verzieht. Beim Bau von E-Gitarren haben sich vor allem Mahagoni und Erle als Klanghölzer für den Korpus durchgesetzt. Solche Hölzer sind aber meistens aufgrund der langen Lagerung in speziell temperierten Räumen sehr teuer. Instrumente mit qualitativ hochwertigen Hölzern erzielen daher oft unglaublich hohe Preise. Für den Bau meiner E-Gitarre habe ich Eichenholz verwendet, was zwar kein klassisches Tonholz ist, doch hatten wir davon für ein Familien-Projekt "Bau eines Wuzzeltisches" schon viele Jahre davor einige Stücke getrocknet, die nun "umgewidmet" wurden. Eiche ist ein sehr stabiles und hartes Holz und hat einen ähnlichen Elastizitätsmodul wie die sonst für den E-Gitarrenbau verwendeten Hölzer.

Gute Gitarrenkörper bestehen aus möglichst wenig einzelnen Teilen. Der Hals ist außerdem häufig aus einem anderen Material und wird in den Korpus eingeleimt oder angeschraubt. Einige Gitarren werden aber auch mit einem durchgehenden Hals produziert. Da man mit dieser Technik den Hals nicht extra am Korpus befestigen muss , ist das ganze Instrument damit steifer, was das Schwingungsverhalten der Saiten positiv beeinflusst. Deshalb und auch aufgrund der Einfachheit dieser Technik habe ich die selbstgebaute E-Gitarre nach diesem Prinzip gebaut. Eine genauere Darstellung der grundlegenden Form sieht man in Abb.44.



Abb.44: Bauplan der selbstgebauten E-Gitarre mit Hauptabmessungen

In Abb.44 sieht man gut, wie die Gitarre aufgebaut ist. Im Schnitt AA kann man erkennen, dass der Korpus aus einem linken und einem rechten Flügel besteht. Dazwischen liegt die Fortsetzung des Halses. Der Hals und die Kopfplatte bestehen aus einem durchgehenden Stück Holz, in das auch eine großzügige Nische für die Tonabnehmer ausgefräst wurde. Dadurch kann man den Tonabnehmer innerhalb dieser Ausfräsung beliebig verschieben und somit andere Klangeigenschaften erhalten. Diese Nische kann man auch in Schnitt BB gut erkennen. Die zwei Schlitze in diesem Bereich dienen dazu, den Tonabnehmer mit 2 Schrauben festzuklemmen, ohne dass man ihn immer neu im Holz festschrauben muss. Auf diesem mittleren Stück der Gitarre werden später dann auch die Saiten befestigt.

Die zwei äußeren Stücke des Korpus und der Hals wurden mit der Kreissäge zurechtgesägt und dann zusammengeleimt. Mit einer Stichsäge wurde dann die Form des Korpus genauer ausgesägt. Danach musste man den Hals mit Raspel und Feile in die gewünschte Form bringen. Normalerweise wird bei E-Gitarren eine Stahlstange in den Hals eingelegt, um ihn zu versteifen. Mit einer Schraube, die sich in den meisten Fällen an der Kopfplatte befindet, kann man durch diesen Stab auch die Krümmung des Halses korrigieren, falls er sich verzogen hat. Um den Bau der Gitarre zu vereinfachen, wurde auf einen solchen Stahlstab verzichtet. Dafür habe ich darauf geachtet, dass der Hals dementsprechend dick wird, um die Steifigkeit zu erhöhen. Nach der groben Bearbeitung des Halses wurden die Kanten des Korpus mit einer Oberfräse abgerundet, und danach mit einem Schmirgelpapier feingeschliffen. Jetzt wurde auf der Rückseite der Gitarre noch das Elektronikfach ausgefräst. Da Eiche ein sehr hartes Holz ist, musste man diese Arbeit in vielen kleinen Schritten erledigen und konnte immer nur eine schmale Schicht abnehmen, um die Oberfräse nicht zu überlasten. Dann wurden noch die Löcher in die Korpusdecke gebohrt, durch die später die Potentiometer und Kippschalter mit dem

Elektronikfach verbunden werden. Danach waren alle groben Arbeiten getan und die Oberfläche der Gitarre wurde überall nocheinmal mit einem sehr feinem Schmirgelpapier bearbeitet, bevor sie mit einem Parkettöl zweimal eingelassen wurde. Durch diese Lackierung wird die Gitarre vor Schmutz und auch vor leichten Stößen geschützt. Durch die Behandlung mit Parkettöl wird außerdem die Maserung des Holzes hervorgehoben, was die Oberfläche der Gitarre verschönert. Das Elektronikfach wurde im Nachhinein noch mit einem speziellen leitenden Lack besprüht, der die Elektronik vor elektrischen Störfeldern schützt und dadurch störende Nebengeräusche teilweise verhindert. Zur Abschirmung und Vermeidung von Brummgeräuschen wurden auch die Saiten und die Brücke, sowie die Metallgehäuse der Potentiometer mit der Masseleitung verbunden und an die Ausgangsbuchse geführt.

Um möglichst viele verschiedene Klänge zu erhalten, wurden zwei Tonabnehmer, ein Humbucker und ein Single-Coil-Tonabnehmer eingebaut. Um zwischen diesen beiden Tonabnehmern zu wechseln oder sie zu kombinieren, wurde ein Kippschalter mit drei Positionen eingebaut. Jeweils eine für jeden Tonabnehmer und eine Stellung in der Mitte, die das Signal beider Tonabnehmer zusammenschaltet. Von diesem Kippschalter geht das Signal weiter zu einem Kondensator-Wahlschalter, mit dem man zwischen vielen verschiedenen Kondensatoren wählen kann. Wie im Elektronikkapitel schon gezeigt verändern Kondensatoren den Klang , indem sie das Resonanzmaximum verschieben.

Der belastete Single-Coil Tonabnehmer hat eine maximale Resonanzfrequenz von etwa 3 kHz. Die minimale Resonanz wurde bei 1 kHz festgelegt. Tiefere Werte machen wenig Sinn, da unmittelbar nach der Resonanz die Tiefpasswirkung beginnt und so die hohen Töne auf der e-Saite, die über 1000 Hertz liegen, bereits herausgedämpft würden. Dementsprechend wurde der Bereich zwischen 1 und 3 kHz logharithmisch in neun Teile geteilt.

Resonanzfrequenz	1000	1116	1245	1389	1551	1731	1932	2156	2685
(Hz)									
Zusatzkapazität	5895	4582	3527	2680	2000	1454	1016	664	154
berechnet (pF)									
Zusatzkapazität	5700	4700	3520	2670	2000	1470	1000	470	100
eingebaut (pF)									
Tab.10: Kapazitätstabelle für C_k mit tatsächlich verwendeten Werten									

Man kann diese genauen Kapazitätswerte aber nicht exakt erreichen, da man Kondensatoren nur mit bestimmter Kapazität kaufen kann und die Herstellungsungenauigkeit relativ groß ist. Durch Parallelschalten von mehreren Kondensatoren war es aber möglich, jeden der in Tab.10 genannten Werte in etwa zu erhalten.

Nach dem Kapazitätswahlschalter wird das Signal an einen logarithmischen Tone-Regler geleitet, mit dem man die Höhen des Signals abschneiden kann. Dieser Tone-Regler ist dann noch mit einem Volume-Potentiometer verbunden, mit dem man die Lautstärke des Ausganssignals steuern kann. Zum Schluss wird dieser noch mit der Steckerbuchse verbunden. Der genauere Verdrahtungsplan wird in Abb.45 gezeigt. Ein Verdrahtungsplan ist bei der Verlötung der Elektronik sehr hilfreich, da er den tatsächlichen Verlauf aller Verbindungskabel und alle Bauteile in ihrer tatsachlichen Anordnung zeigt und man sonst leicht den Überblick verliert.



Abb.45: Verdrahtungsplan

6.2 Berechnung der Bundpositionen

Nach dem Einbau der Elektronik wurden die Bundpositionen ausgerechnet, angezeichnet und die Bundschlitze gesägt. Diese Arbeit muss sehr präzise durchgeführt werden, damit die Intonation (Feinabstimmung der Tonhöhe) der Gitarre stimmt. Die Position der Bünde kann man für jede beliebige Mensur (Saitenlänge, L) berechnen. Da der Ton in der Mitte der Saitenlänge genau eine Oktave höher sein muss und man den Bereich davor in 12 Bünde einteilt, ergibt sich die Formel

$$\frac{L}{2} = L \cdot x^{12} \tag{87}$$

Durch den immer gleichen Faktor x zwischen den Bünden, ergibt sich, dass man bei der Halbierung jeder Länge einer an einem Bund gedrückten Saite wieder die Oktave bekommt. Das bewirkt, dass die Gitarre eine sogenannte temperierte Stimmung besitzt [37], weshalb man, wie auch auf dem Klavier, in allen Tonarten darauf spielen kann. Aus der obigen Beziehung erhält man, indem man durch L kürzt und nach x auflöst, $x = \sqrt[12]{0.5} = 0.94387$ und als Formel für den Bundabstand P_n gemessen vom oberen Sattel

$$P_n = L\left(1 - \left[\sqrt[12]{0.5}\right]^n\right)$$
 (88)

Durch Einsetzten der gewünschten Mensur und dem jeweiligen Bund erhält man dann die exakte Position. Tab.11 enthält die Bundabstände für eine Mensur von 630 mm, die für die Selbstbaugitarre gewählt wurde

Bund <i>n</i>	Position P_n [mm]	Bund <i>n</i>	Position P_n [mm]				
1	35.4	11	296.3				
2	68.7	12	315.0				
3	100.2	13	332.7				
4	130.0	14	349.4				
5	158.0	15	365.1				
6	184.5	16	380.0				
7	209.5	17	394.0				
8	233.1	18	407.3				
9	255.4	19	419.8				
10	276.4	20	431.6				
Tab.11: Bundabstände für die Eigenbau E-Gitarre mit einer Mensur von 630 mm							

Wenn die Bundschlitze angezeichnet und eingesägt sind, kann man die Bundstäbe einsetzen. Wenn man beim Sägen der Bundschlitze darauf geachtet hat, dass sie die richtige Breite haben, braucht man die Bundstäbe nur mit einem Gummihammer hineinschlagen. Diese klemmen dann von allein in den Schlitzen.

Nach diesem Schritt wurde die Brücke (die am Korpus befestigte Saitenauflage) im Abstand von 63 cm zum Sattel (Saitenauflage am Gitarrenhals) befestigt. Jetzt musste man nurmehr die Mechaniken an der Kopfplatte befestigen und den Sattel aufkleben. Danach konnte man schon die Saiten aufziehen und Feineinstellungen an der Gitarre vornehmen. Die einzelnen Arbeitsgänge sind in den folgenden Bilder von Abb.46 illustriert.





a) Grobe Form des Halses mit Ausnehmung für die b) Die beiden Tonabnehmer in ihrer Halterung Tonabnehmer





c) Die 3 Hauptteile: Durchgehender Hals und d) Zusammenleimen der einzelnen Teile Korpus links und rechts



e) Form nach dem Aussägen mit der Stichsäge



f) Ansicht von hinten mit geschliffenem Hals



g) Fräsen der Kanten



i) Ansicht von hinten nach dem Fräsen



h) Feinschliff nach dem Fräsen



j) Lackieren der Gitarre mit Parkettöl



k) Ausfräsung für Elektronik



m) Einbau der Potentiometer



o) Komplette Verdrahtung



I) Elektronikfach mit Abschirmlack lackiert



n) Löten



p) Auftragen der Bundabstände



q) ... und Nachmessen



r) Sägen der Bundschlitze



s) Einschlagen der Bünde



t) Befestigen der Gurtpins



u) Aufziehen der Saiten



v) Einstellen der Saitenlage



w) Premiere!

Abb.46: Bilder der einzelnen Arbeitsschritte

7 Messung der Klangspektren und Vergleich mit der Theorie

7.1 Die Diskrete Fourier Transformation (DFT)

Die Diskrete Fourier Transformation (DFT) ist die Grundlage der digitalen Signalverarbeitung. Mit dieser Methode ist es möglich, aus den digitalisierten Audiodateien wieder die Amplitudenspektren zu ermitteln, um sie mit den Rechenergebnissen zu vergleichen. Die DFT entspricht im Prinzip der bei den Anfangsbedingungen der Wellengleichung verwendeten Zerlegung in Sinussignale. Da es jedoch nur an diskreten Stellen Datenpunkte gibt, kann das nur an diesen Stellen geschehen.

Das Signal wird bei der DFT nach [38] zunächst als Summe von diskreten Werten der Sinus- und Cosinusfunktion für eine Grundfrequenz und deren Oberschwingungen dargestellt. Danach werden Sinus und Cosinus durch die komplexe e-Funktion ausdrückt, weil man damit leichter rechnen kann. Die Reihendarstellung einer Signalwertefolge x(n) lautet dann nach [38]

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{2\pi i k n}{N}}$$
(89)

wobei n von 0 bis N-1 geht. N ist die Anzahl der Datenpunkte. Alle x(n) zusammen entsprechen den Ausgangssignalen der Gitarre zu den Abtastzeitpunkten, die Amplitudenfunktionen X(k)entsprechen Die k-Werte bezeichnen die Frequenzen der Teilden zugehörigen Spektralkoeffizienten. schwingungen, aus denen das Signal zusammengesetzt wird. Im Unterschied zur kontinuierlichen Fourierzerlegung, wo unendlich viele Frequenzen benutzt werden, gibt es hier aber nur N Stück. Davon beschreiben bereits die ersten N/2 das Signal, weil das Spektrum symmetrisch ist und die zweite Hälfte nur noch sogenannte Spiegelfrequenzen enthält [28]. Deshalb wurden in der Auswertung nur die ersten N/2 Frequenzwerte für die Skalierung auf die Abtastfrequenz verwendet. In Gl. (89) ist keine Zeit mehr enthalten, weil sich das Abtastintervall T_s im Zähler und Wenn man die Zeit wieder hineinbringt, indem man mit dem Nenner herausgekürzt hat. Abtastintervall erweitert und den Exponenten als $2\pi i \frac{k}{N} f_S \cdot nT_s$ schreibt, so sieht man, dass nur Frequenzen bis zur Abtastfrequenz f_S vorkommen können. Diese stellt die Genauigkeitsgrenze der DFT dar, während N die Auflösung in Frequenzintervalle festlegt. Aus der obigen Gleichung muss man nun die X(k) berechnen, um das Amplitudenspektrum zu erhalten, das zum Vergleich mit den Rechenergebnissen aus Kap. 4 gebraucht wird . Das geschieht mit der Beziehung

$$X(k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{-2\pi i k n}{N}}$$
(90)

Die Berechnung der X(k) ist zwar nicht kompliziert, muss aber sehr oft durchgeführt werden. Wenn man die Spektren während der Aufnahme mit maximaler Auflösung z.B. 10 Mal sehen will, müssten 44100 Gleichungen 10 Mal pro Sekunde gelöst werden (Audiosignale haben meist eine Abtastrate von 44100 Hz). Deshalb wurden dafür schnelle Algorithmen entwickelt, die als Fast Fourier Transformation (FFT) bezeichnet werden. Mit einem solchem Programm, das in der verwendeten Mathematik-Software Octave enthalten ist, wurden auch die unten gezeigten Auswertungen durchgeführt. Wichtige Merkmale der DFT sind

- Man hat nur endlich viele Frequenzen
- Genaue Darstellung nur bei echt periodischen Funktionen, die passend fortgesetzt werden
- Passt die Fortsetzung nicht genau (Normalfall), entstehen künstliche Spektrallinien
- Um diese abzuschwächen, verwendet man Fensterfunktionen, die an den Rändern der Datensätze die Amplituden klein machen
- Gedämpfte Signale sind nicht periodisch und erzeugen ebenfalls künstliche Spektrallinien.

Diese Störeffekte kann man auch in den später gezeigten Abbildungen sehen.

7.2 Vorgangsweise bei der Messung

Um das Ausgangssignal der Gitarre möglichst direkt mit den berechneten Ergebnissen zu vergleichen, wurde es aufgenommen. Durch die digitale Aufnahmetechnik kann man heutzutage mit einem Computer und einem Digitalen Interface mit wenig Ausgaben qualitativ sehr hochwertige Aufnahmen machen. Ein solches Interface dient als Schnittstelle zwischen Computer und dem Signal aus der Gitarre. Ein Interface hat meistens mehrere XLR-Eingänge, die bei Mikrophonen verwendet werden. Das TASCAM US-122 L, das Interface, das ich zum Aufnehmen verwendet habe, hat außerdem einen Klinkeneingang (solche werden in der Audioübertragung oft verwendet), der speziell für E-Gitarren entworfen ist, und wie die Gitarrenverstärker einen sehr hohen Eingangswiderstand (1 MOhm) hat. Dadurch ist das Signal gleichwertig zum Signal, das man aus dem Gitarrenverstärker hört. Jede Sekunde wird mit 44100 Punkten aufgelöst, das heißt es werden auch Frequenzen, die nahe an der Hörgrenze des menschlichen Ohrs (20000 Hz) liegen noch genau abgebildet. Ein Signal mit einer Frequenz von 20000 Hz wird bei einer Abtastrate von 44100 Punkten noch mit mehr als 2 Werten pro Periode aufgelöst, dadurch kann man es wieder eindeutig rekonstruieren (Abtasttheorem, s. [28], S. 242 ff). Wenn weniger als 2 Punkte einer Periode bekannt sind, findet man unendlich viele hochfrequente Sinuskurven, die auf das Signal passen würden. Durch eine Abtastrate von 44100 Werten pro Sekunde werden also alle Schwingungen mit einer Frequenz höher als 22050 Hz nicht berücksichtigt. In Abb.47 sieht man die grundlegende Form des Ausgangssignals der Gitarre.




In Abb.47 kann man gut erkennen, dass das Signal in etwa symmetrisch zur Zeitachse verläuft. Bei diesen Aufnahmen wurden die ersten 0.5 s freigelassen, um sicher zu gehen, dass das Signal wirklich von Beginn an auf der Aufnahme ist und da dadurch die spätere Bearbeitung erleichtert wird. Gleich zu Beginn hat das Signal die größte Auslenkung, danach fällt die Signalstärke ab und hält sich dann einige Zeit auf einem Niveau. Dann klingt das Signal ganz aus. Dieses Verhalten (s. Abb.48) ist für die meisten Schallsignale typisch.



Abb.48: ADSR Hüllkurve von Schallsignalen nach [39]

In Abb.48 sieht man, dass das Schallsignal grob in 4 Teile eingeteilt werden kann. Es besteht aus einem Attack Bereich (A), während dem das Signal einklingt, bis es die maximale Schallintensität erreicht hat. Bei Gitarren ist diese Phase sehr kurz, da das Signal durch Anzupfen der Saite sehr schnell seine maximale Amplitude erreicht hat und von da an nurmehr abklingt. Danach folgt die Decay Phase (D), die die Dauer zwischen der maximalen Amplitude und dem Sustainbereich (S) beschreibt. Während diesem Teil des Signals hält sich die Amplitude auf einem Niveau, bis die Saite in der Releasephase (R) schließlich ganz ausklingt.

Wenn man diese Audiodateien zeitlich feiner auflöst, kann man die einzelnen Perioden der Schwingung erkennen. Bei einer Frequenz von 330 Hz (e-Leersaite der Gitarre) wird eine Periode also mit $\frac{44100}{330} = 134$ Punkten aufgelöst. Wenn man nun 400 Werte aus dem Audiosignal zu einem beliebigem Zeitpunkt herausgreift erhält man ein Bild über 10 ms mit drei Schwingungen.





Abb.49: Amplitudenform des Signals a) nach 0.68 s, b) nach 1.36 s, c) nach 3.17 s und d) nach 5.67 s bei der e-Leersaite (330 Hz) der selbstgebauten Gitarre. (Anregung bei ca. L/10 und TA bei L/4)

In Abb.49 sind die Schwingungsformen des Audiosignals zu unterschiedlichen Zeiten gezeigt. Da die Saitenschwingung der Gitarre einer frequenzabhängigen Dämpfung (hochfrequente Obertöne fallen schneller ab) unterliegt, ist zu erwarten, dass die Schwingungsform gegen Ende des Tons immer runder und glatter wird, da die Sinuskurven mit hoher Frequenz schneller abklingen und sich das Gesamtsignal somit immer mehr der Grundschwingung annähert. Abb.49.a zeigt die Schwingungsform kurz nach Anzupfen der Saite. Zu dieser Zeit findet noch kaum eine Dämpfung statt. Deshalb kann man dieses Bild am ehesten mit den berechneten Schwingungsformen (s. Abb.32.a) da die Berechnung ohne Berücksichtigung der Dämpfung gemacht wurde. Der vergleichen, prinzipielle Verlauf stimmt dabei sehr gut überein. Die Kurvenform zwischen den Signalspitzen ist bei der berechneten Kurve aber glatter, da hier überhaupt keine Dämpfung berücksichtigt ist und daher mehr hochfrequente Oberschwingungen zur Verfügung stehen, um den konstanten Kurvenabschnitt beschreiben zu können. Im Verlauf von Abb.49.b bis d sieht man mit zunehmender Eingriffszeit die Annäherung der Schwingungsform an die Grundschwingung und damit das Wegfallen der hohen Frequenzen. Die Signalamplitude wurde in allen Bildern normiert, um sie besser vergleichen zu können, da die Amplitude im hinteren Bereich des Audiosignals nur mehr sehr klein ist.

7.3 Vergleichsmessungen und Auswertung

In den folgenden Abbildungen werden nun die Spektralanalysen der aufgenommenen Audiosignale mit den berechneten Werten verglichen. Mit Hilfe der oben erwähnten FFT wurden die Spektren aus den Audiosignalen erzeugt und direkt neben die berechneten Spektren gestellt.



Abb.50: Berechnete und gemessene Spektralkoeffizienten ca. ¼ s nach Saitenanschlag mit verschiedenen FFT-Einstellungen

In Abb.50 werden verschiedene Varianten der Datenanalyse verglichen und zwar der Einfluss der Länge des ausgewählten Datensatzes und der Einfluss der Fensterfunktion. Die roten Dreiecke auf der roten Kurve zeigen die berechneten Spektralmaxima. Die grüne Kurve zeigt die gemessenen Spektren bei einer Datensatzlänge von 10000 Punkten (226 ms). Die rote mit x versehene Kurve zeigt die Auswirkung einer grösseren Datensatzmenge von 20000 Elementen (452 ms). Durch die feinere Auflösung werden die Maxima schärfer, durch das längere Zeitintervall werden die Ergebnisse aber zeitlich gemittelt. Die blaue Kurve zeigt den Einfluss einer cosinusförmigen Fensterung, die das Signal an den Rändern abflacht und damit Sprünge am Rand abschwächt und den mittleren Bereich stärker gewichtet. Dadurch wird das Signal sogar noch schärfer wie mit einem längeren Zeitraum , obwohl wieder ein kürzeres Zeitintervall von 10000 Werten verwendet wurde. Für die weiteren Berechnungen wurde daher in der Regel diese Variante der Messdatenerfassung verwendet.

Schon an diesem Bild kann man gut erkennen, dass die Berechnungen mit den Messungen sehr gut übereinstimmen. Die Lage der Maxima der Spektrallinien stimmt sehr gut überein und auch die Höhe der Amplituden ist bis auf die letzten Obertöne sehr gut.



Abb.51: Spektralanalyse nach 1.8 s. Vergleich von gedämpfter und ungedämpfter Berechnung

In Abb.51 sieht man einen Vergleich von Messung und Rechnung zu einem späteren Zeitpunkt, wo die Schwingung schon deutlich abgeklungen ist. Die Kurve mit den Dreiecken auf magentafarbener Hilfslinie zeigen die ungedämpft berechneten Spektrallinien. Diese stimmen mit den Messungen ab dem sechsten Oberton nur noch sehr schlecht überein. Das zeigt deutlich, dass tatsächlich eine frequenzabhängige Dämpfung auftritt, wie sie auch in der Literatur [15] beschrieben wird. Um dieses Ergebniss besser vergleichen zu können, wurde der einfache Dämpfungsansatz mit dem zusätzlichen Faktor $\frac{1}{\omega_k}$ verwendet. Dadurch stimmt das Ergebnis für die mittleren Eigenfrequenzen dann besser überein (fünfter bis zehnter Oberton), bei den ersten vier Obertönen wird das Ergebniss aber etwas verschlechtert. Daher kann man schließen, dass der oben verwendete Dämpfungsansatz zu einfach ist.

In den weiteren Vergleichen wurde daher kurz nach Anregung der Saiten ins Signal eingegriffen und mit den Berechnungen der ungedämpften Lösung verglichen, da diese zu diesem Zeitpunkt am ehesten gültig ist.

Alle gezeigten Messungen wurden mit einem Single-Coil Tonabnehmer und einem Ton von 330 Hz (e-Leersaite) gemacht. Außerdem waren Klang- und Lautstärkeregler voll aufgedreht (höchster Lastwiderstand). Bis auf eine Messung wurde kein zusätzlicher Kondensator verwendet. Die wirksame Breite des Tonabnehmermagnetfelds wurde für den Single-Coil Tonabnehmer zunächst nach [27] gewählt, wo etwa 2.5 cm als Richtwert angegeben sind. Das ergab jedoch schon massive Auslöschungen um den 20-ten Oberton, die in den Messungen nicht auftraten. Deshalb wurde die Breite zu 1.5 cm gewählt, was plausiblere Ergebnisse lieferte und in etwa der geometrischen Breite entspricht.





a)



Abb.52: Einfluss der Anzupfposition auf die Form der Klangspektren. a) Anregung bei L/10, b) Anregung bei L/6, c) Anregung bei L/3

Abb.52 zeigt den Einfluss verschiedener Anzupfstellen auf die Zusammensetzung des Klangspektrums. In Abb.52.a wurde L/10 als Anzupfstelle gewählt, der Tonabnehmer befindet sich bei allen Messungen bei L/5. Daher ist zu erwarten, dass jeder zehnte und jeder fünfte Oberton ausgelöscht wird. In diesem besonderen Fall überschneiden sich diese Auslöschungen teilweise. Das kann man in Abb.52.a sehr deutlich erkennen. Jeder fünfte Oberton wird auch in der Messung durch die Tonabnehmerposition abgeschwächt und jeder zehnte zusätzlich durch die Anzupfstellen. Die Höhe der Maxima passt ebenfalls fast für alle dargestellten Eigenfrequenzen recht gut. Außerdem sieht man in Abb.52.a, dass der erste Oberton entgegen der Erwartung nicht immer die größte Amplitude besitzt. Ursache ist die Abhängigkeit der induzierten Spannung von der Saitengeschwindigkeit, denn hochfrequente Schwingungsanteile werden vom Tonabnehmer stärker wahrgenommen. Dieser Effekt konnte auch während einer Aufnahme mit dem Programm Ableton Live, das eine FFT-Spektralanalyse in Echtzeit ermöglicht, gesehen werden.

Abb.52.b zeigt ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung von berechneten und gemessenen Spektren. Anzupfposition war bei dieser Messung L/6, wodurch zusätzlich zur Tonabnehmerabschwächung bei L/5 jeder sechste Oberton abgeschwächt wird. Dementsprechend hat jeder fünfte und sechste Oberton eine geringere Amplitude.

In Abb.52.c ist die Anregung bei L/3 gezeigt. Daher sollte jeder dritte Oberton wegfallen bzw. abgeschwächt werden. Bei der dritten Eigenfrequenz ist dieser Effekt aber kaum sichtbar, die sechste und neunte Eigenfrequenz sind aber deutlich abgeschwächt. Die Auslöschung durch die Tonabnehmerposition kann man wieder deutlich erkennen.



Abb.53: Einfluss der Tonabnehmerposition auf die Klangspektren. a) Tonabnehmer bei L/4, b) Tonabnehmer bei L/6

Bild 53 zeigt den Effekt der Tonabnehmerposition auf das Klangspektrum. Um den Einfluss der Tonabnehmerposition deutlich zu sehen, wurde eine Anzupfposition von L/10 gewählt, um die daraus folgenden Auslöschungen gering zu halten. In Abb.52 a sieht man bereits, dass durch eine Tonabnehmerposition bei L/5 jeder fünfte Oberton abgeschwächt wird. Abb.53 a/b zeigt nun, dass durch Veränderung der Tonabnehmerposition sich auch die Abschwächung dementsprechend verschiebt. Diese Aufnahmen waren nur mit der speziellen selbstgebauten E-Gitarre möglich, da man

bei dieser die Position des Tonabnehmers in einem extra dafür ausgefrästen Fach stufenlos verstellen kann. Auch hier passt neben der Lage auch die Höhe der Spektrallinien gut zu den Messungen. Abweichungen treten meist bei den hohen Obertönen auf, die aber durch ihre niedrige Amplitude nur einen geringen Einfluss auf den Klang haben.



Abb.54: Ausgangsspektrums mit Zusatzkondensator 5700 pF

Abb.54 zeigt das Klangspektrum mit Verwendung des größten Zusatzkondensators von 5700 pF. Die Resonanzfrequenz wird dadurch auf etwa 1000 Hz nach unten verschoben und die Obertöne werden stärker geschwächt. Das wird auch aus Abb.54 deutlich ersichtlich. Wenn man diese Abbildung mit Abb.52.a (gleiche Bedingungen aber ohne Zusatzkondensator) vergleicht, kann man erkennen, dass die Amplituden der Spektrallinien hoher Obertöne stark abgeschwächt sind. Auch die Rechnung zeigt einen merklichen Abfall nach der Resonanzfrequenz. Man kann erkennen, dass hohe Obertöne bei der Berechnung aber unterschätzt werden. Beim Spielen der Gitarre habe ich das Phänomen, dass die zugeschalteten Kondensatoren den Klang zunehmend obertonärmer und damit weicher machen, ebenfalls deutlich hören können. Daher ermöglicht der zusätzlich eingebaute Kondensatorwahlschalter tatsächlich die Einstellung von interessanten Soundvariationen.

In den obigen Abbildungen kann man erkennen, dass die Maxima der Spektrallinien vor und nach der Resonanzfrequenz in etwa auf zwei Geraden mit unterschiedlicher Steigung liegen. Das kommt daher, dass die Spektrallinein nach der Resonanzfrequenz mit einem Faktor $\frac{1}{\omega^2}$ (Tiefpass 2. Ordnung) multipliziert werden. Besonders gut kann man das in Abb.52.b erkennen. Daraus kann man schließen, dass wenn man über die Maxima der Spektrallinien eine Hüllkurve legt, sich die Resonanzfrequenz an einer Knickstelle zeigen muss. Diese Methode kann man verwenden, um die Resonanzfrequenz für eine beliebige Gitarre näherungsweise zu ermitteln. Dies wurde im Folgenden anhand einer PRS SE Singlecut E-Gitarre ausprobiert. Um möglichst viele Spektrallinien zu bekommen wurden mehrere Töne auf einmal angeschlagen. Dadurch erhält man eine genauere Hüllkurve.



Abb.55: Summenspektrum aller Töne für eine PRS SE E-Gitarre zur näherungsweisen Bestimmung der Resonanzfrequenz

Abb.55 zeigt die Spektrallinien für viele gleichzeitig angeschlagene Töne. Man kann deutlich einen Knick bei etwa 2500 Hz erkennen. Die zwei Kurven stellen den theoretischen Abfall der Gesamtübertragungsfunktion dar. Die rote Kurve fällt vor der Resonanz mit ω^{-1} (die Koeffizienten B_k fallen mit ω^{-2} ab und die Induktion liefert wieder ein ω)und danach mit ω^{-3} ab (Multiplikation mit Tiefpass 2. Ordnung nach der Resonanz). Die grüne Kurve ist wegen der Dämpfung mit einem zusätzlich Faktor ω^{-1} durchmultipliziert. Beide Kurven zeigen ebenfalls den Knick und bestätigen diese Abschätzung nocheinmal von Seiten der Theorie.

8 Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

In der vorgelegten Arbeit wurden einige der physikalischen Grundlagen der E-Gitarre beschrieben. Weil die Saitenschwingung die Grundlage der Tonerzeugung ist, wurde sie ausführlicher behandelt. Dazu wurde die Wellengleichung mit einem Separationsansatz gelöst und die Auslenkung als Fourierreihe dargestellt. Dadurch ergab sich die Klangzusammensetzung aus Grundton und Obertönen. Das akustische Signal wird nach dem Induktionsgesetz proportional zur Geschwindigkeit auf den Tonabnehmer übertragen. Unter der Annahme dass der Tonabnehmer durch ein Ersatzschaltbild aus Kapazität, Induktivität und ohmschem Widerstand darstellbar ist wurde die Übertragungsfunktion der gesamten Elektronik der Gitarre mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln berechnet. Daraus wurde ersichtlich, dass auch die Elektronik einen markanten Einfluss auf den Klang hat, da sie einen Tiefpass 2. Ordnung darstellt, der durch eine Resonanzfrequenz und eine nachfolgende starke Dämpfung der Signale gekennzeichnet ist. Zusammen mit der Wellengleichung erhält man dann ein Simulationsmodell für das Ausgangssignal einer E-Gitarre, mit dem die Haupteffekte auf den Gitarrensound untersucht werden können.

Ein weiteres Kapitel behandelt die Mechanik der Gitarre. In diesem Kapitel werden die Kräfte, die auf die Gitarre durch die Saiten wirken, aus der Wellengleichung ausgerechnet. Aus diesen Spannkräften wurde dann die Biegung des Halses einer E-Gitarre in Abhängikeit von Material und Querschnitt berechnet. Es ergab sich eine Gesamtkraft von etwa 450 N, die den Gitarrenhals je nach Eigenschaften im Bereich von 0.1 mm bis wenigen Millimetern durchbog.

Das folgende Kapitel widmet sich dem Bau einer E-Gitarre, in dem auch die Erkenntnisse aus dem Mechanik-Kapitel angewandt wurden. Die Gitarre wurde im Unterschied zu käuflichen Modellen mit einer Ausfräsung zum Verstellen der Tonabnehmer und einem Kondensatorwahlschalter zum Modifizieren des Klangs ausgestattet.

Haupteffekte, die den Klang beeinflussen sind demnach

- Anzupfposition
- Tonabnehmerposition und in geringem Ausmaß die Tonabnehmerbreite sowie die
- Lage der Resonanzfrequenz, die durch die Gesamtkapazität bestimmt ist

Mit digitaler Aufnahmetechnik wurden Wave-Dateien erstellt und mit einem Fast Fourier Transformationsprogramm ausgewertet. Das letzte Kapitel behandelt den Vergleich der Messungsergebnisse mit den Berechnungen. Dabei konnte in vielen Fällen eine sehr gute Übereinstimmung festgestellt werden.

Im Laufe der Arbeit zeigte sich, dass für eine genauere Behandlung des Themas noch folgende Aspekte berücksichtigt werden sollten

- Lösung der Wellengleichung mit realistischer frequenzabhängiger Dämpfung
- Genaueres Übertragungsverhalten vom akustischen Signal auf den Tonabnehmer
- Korpusschwingungen und Kopplung zur Saitenschwingung

Abschliessend kann ich sagen, dass ich trotz der vielen, teils mühevollen Arbeit einiges gelernt und viel Spaß bei der Behandlung des Themas gehabt habe, und in der selbstgebauten Gitarre auch ein handfestes Ergebnis.

9 Anhang: Verwendete Octave-Programme

1 Berechnung der Eigenschwingungen

```
function eigenformen()
%
%
    Berechnung der ersten 5 Eigenformen einer
schwingenden Saite
%
L=1;
%
% Berechnen
%
for i=1:1:100
  xfeld(i)=i/100*L:
  s1feld(i)=sin(xfeld(i)*1*pi/L);
  s2feld(i)=sin(xfeld(i)*2*pi/L);
   s3feld(i)=sin(xfeld(i)*3*pi/L);
   s4feld(i)=sin(xfeld(i)*4*pi/L);
  s5feld(i)=sin(xfeld(i)*5*pi/L);
end;
%
% Plotten
%
hold on;
axis([0,L,-1.2,1.2]);
xlabel("Ortskoordinate x [m]");
vlabel("Auslenkung [-]");
title("Eigenschwingungen");
plot(xfeld,s1feld, "r");
plot(xfeld,s2feld, "g");
plot(xfeld,s3feld, "c");
plot(xfeld,s4feld, "m");
plot(xfeld,s5feld, "b" );
%
endfunction;
2 Berechnung der Koeffizienten B k
function bk()
%
% Berechnet die Koeffizienten B k der Lösung der
Wellengleichung
% für drei verschiedene Anregungsstellen
%
n=2; n1=8;n2=13; kmax=500; H=0.01; i=0;
%
% Schleife über die Oberschwingungen
for k=1:1:kmax
  %
  % kontinuierliche Werte
  kfeld(k) =k/10;
  bkfeld(k)
                                    =abs((2*H*n^2)/((n-
1)*kfeld(k)^2*pi^2)*sin(kfeld(k)*pi/n));
  bk1feld(k)=abs((2*H*n1^2)/((n1-
1)*kfeld(k)^2*pi^2)*sin(kfeld(k)*pi/n1));
  bk2feld(k)=abs((2*H*n2^2)/((n2-
1)*kfeld(k)^2*pi^2)*sin(kfeld(k)*pi/n2));
  i++:
  %
  % diskrete Werte zu den Eigenschwingungen
  if(i==10)
```

i=0; bkxfeld(k) =abs((2*H*n^2)/((n-1)*kfeld(k)^2*pi^2)*sin(kfeld(k)*pi/n)); bk1xfeld(k)=abs((2*H*n1^2)/((n1-1)*kfeld(k)^2*pi^2)*sin(kfeld(k)*pi/n1)); bk2xfeld(k)=abs((2*H*n2^2)/((n2-1)*kfeld(k)^2*pi^2)*sin(kfeld(k)*pi/n2)); end; end : % % Darstellung der Ergebnisse als 2d-Plot hold on: title("Amplitudenspektrum fuer Anregung bei L/2, L/8 und L/13 mit H=0.01 m"); xlabel("k / [-]"); ylabel("Koeffizienten B_k / [m]"); axis([0,kmax/10,10^(-6),0.1]); semilogy (kfeld,bkfeld,"r") ; semilogy (kfeld,bkxfeld,"ro") ; semilogy (kfeld,bk1feld,"g"); semilogy (kfeld,bk1xfeld,"g+") ; semilogy (kfeld, bk2feld, "b"); semilogy (kfeld, bk2xfeld, "bx"); kontinuierlich","L/2 legend("L/2 diskret","L/8 kontinuierlich", \ "L/8 diskret","L/13 kontinuierlich","L/13 diskret"); hold off; % endfunction; 3 Lösung der Wellengleichung und 2d Plot function w von x und t() % % Berechnet die Lösung der Wellengleichung in Abhängigkeit % von der Anregungsstelle L/n für eine Schwingungsperiode. % n=2; kmax=50; H=0.01*100; ii=0; L=0.7; f0=100; hold on; % % Zeitschleife for t=0:0.001:0.011 ii=ii+1; % % Ortsschleife for i=1:1:100 xfeld(i)=i/100*L; wfeld(i)=0; % % Schleife über die Eigenfrequenzen for j=1:1:100 bk1feld(j)=(2*H*n^2)/((n-1)*j^2*pi^2)*sin(j*pi/n); bkcosi=bk1feld(j)*cos(f0*2*pi*j*t)*sin(j*pi/L*xfeld(i));% *exp(-f0*0.2*t)%; wfeld(i)=wfeld(i)+bkcosi; end;

end: % % Ergebnisausgabe als 2d-Plot xlabel("Ortskoordinate x [m]"); ylabel("Auslenkung w [cm]"); %title("Saitenschwingung, Anregung bei L/8, d=20 1/s"); title("Saitenschwingung, Anregung bei L/2"); if (ii==1) plot(xfeld,wfeld,"r"); elseif (ii==2) plot(xfeld,wfeld,"g"); elseif (ii==3) plot(xfeld,wfeld,"b"); elseif (ii==2) plot(xfeld,wfeld,"c"); elseif (ii==4) plot(xfeld,wfeld,"m"); elseif (ii==5) plot(xfeld,wfeld,"r--"); elseif (ii==6) plot(xfeld,wfeld,"g--"); elseif (ii==7) plot(xfeld,wfeld,"b--"); elseif (ii==8) plot(xfeld,wfeld,"c--"); elseif (ii==9) plot(xfeld,wfeld,"m--"); elseif (ii==10) plot(xfeld,wfeld,"r.."); elseif (ii==11) plot(xfeld,wfeld,"g.."); end axis([0,0.95,-1.,1.]); legend("t=0s","t=0.001s","t=0.002s","t=0.003s", \ "t=0.004s","t=0.005s","t=0.006s","t=0.007s","t=0.008s"," t=0.009s","t=0.010s"), end; endfunction; 4 Lösung der Wellengleichung und 3d Plot mit Dämpfungsvarianten function w_von_x_und_t_surf() % % Berechnet die Lösung der Wellengleichung in Abhängigkeit von der Anregungsstelle % L/n für eine Schwingungsperiode % und stellt das Ergebnis als Fläche über Ort und Zeit dar. % % Varianten mit Daempfung kommentiert % n=2; kmax=50; H=0.01*100; ii=0; L=0.7; f0=100; hold on; % % x,t Wertepaare für das Rechengitter x=(1/100*L:1/100*L:L); t=(0:0.0002:0.020); [xx,tt]=meshgrid(x,t); % Berechnung der Auslenkungen

wfeld=0: for j=1:1:100 bk=(2*H*n^2)/((n-1)*j^2*pi^2)*sin(j*pi/n); d=0.: % ohne Daempfung % d=f0; % fixe Daempfung % d=j*f0; % frequenzabhaengige Daempfung (nicht korrekt) om0=2.*pi.*j.*f0; % Kreisfrequenz ohne Daempfung om =(om0.^2-(d./2.).^2).^(0.5); % Kreisfrequenz mit Daempfung ak=bk.*d./2./om; bkcosi=(bk.*cos(om.*tt)+ak.*sin(om.*tt)).*sin(j.*pi./L.*x x).*exp(-d.*0.5.*tt); wfeld=wfeld.+bkcosi; end ; % % Ergebnisdarstellung als 3d Plot surf(x,t,wfeld); xlabel("Ortskoordinate x [m]"); ylabel("Zeit t [s]"); zlabel("Auslenkung w [cm]");

title("Saitenschwingung, Anregung bei L/8"); %title("Saitenschwingung, Anregung bei L/8, d=20 1/s"); %title("Saitenschwingung, Anregung bei L/2, frequenzabhaengige Daempfung"); view(60,30); %

endfunction;

5 Wechselstromwiderstand des SC-Tonabnehmers

function singlecoil_ex() singlecoil berechnet zeichnet den % und Wechselstromwiderstand % eines Singlecoil-Tonabnehmers % Eingabedaten: % R: Ohmscher Widerstand % L: Induktivität % C: Kapazität % Rp: Dämpfungswiderstand % pi=3.1415; R=7160; Rp=500000.; L=3.8; C=1.3e-10; % % Berechnung des Wechselstromwiderstands % % Frequenzschleife % for k=1:1:10000+10 if(k<=10000) freq(k)=k.*10.; else freq(k)=(k-10000).*100000.; end om=2.*pi.*freq(k); % nachLemme zet lemme=1./(j.*om.*C+1./(R+j.*om.*L)); z1=real(zet_lemme);

```
z2=imag(zet lemme);
  z lemme(k)=(z1.^2+z2.^2).^(0.5);
% nach Christiani
  zet chris=1./(j.*om.*C+1./(R+j.*om.*L)+1/Rp);
  z1=real(zet chris);
  z2=imag(zet_chris);
  z_chris(k)=(z1.^2+z2.^2).^(0.5);
% Tangenten zur R, L, C-Bestimmung
  zet_r(k)=R;
  zet_l(k)=om.*L;
  zet_c(k)=1./(om.*C);
end;
%
% Messwerte
%
             ze(1)=8180;
fe(1)=50;
fe(2)=70;
             ze(2)=8400;
 fe(3)=100;
              ze(3)=8873;
              ze(4)=9400;
fe(4)=150;
fe(5)=200;
              ze(5)=10310;
fe(6)=300;
              ze(6)=10650;
fe(7)=400;
              ze(7)=12490;
fe(8)=500;
              ze(8)=13800;
fe(9)=600;
              ze(9)=16540;
fe(10)=700;
              ze(10)=18350;
fe(11)=800;
              ze(11)=20576;
fe(12)=1000; ze(12)=23400;
fe(13)=1200; ze(13)=29400;
fe(14)=1500; ze(14)=35400;
fe(15)=1700; ze(15)=39400;
fe(16)=2000; ze(16)=47400;
fe(17)=2500; ze(17)=58416;
fe(18)=2700; ze(18)=66070;
fe(19)=3000; ze(19)=74400;
fe(20)=4000; ze(20)=108500;
fe(21)=5000; ze(21)=159400;
fe(22)=6000; ze(22)=247675;
 fe(23)=7000; ze(23)=449400;
 fe(24)=8000; ze(24)=359400;
 fe(25)=9000; ze(25)=299400;
 fe(26)=10000; ze(26)=239400;
 fe(27)=12000; ze(27)=163040;
 fe(28)=15000; ze(28)=108491;
 fe(29)=20000; ze(29)=69988;
fe(30)=25000; ze(30)=57464;
fe(31)=30000; ze(31)=47400;
fe(32)=40000; ze(32)=30705;
fe(33)=50000; ze(33)=23400;
fe(34)=70000; ze(34)=16540;
fe(35)=10;
              ze(35)=7160;
% Fehler (geht nicht mit Octave)
f err(1)=2000; zet err(1)=47400; ey(1)=4835;
f_err(2)=4500; zet_err(2)=133950; ey(2)= 16744;
f_err(3)=7500; zet_err(3)=404400; ey(3)= 103120;
f_err(4)=8000; zet_err(4)=359400; ey(4)= 89130;
f_err(5)=10000; zet_err(5)=239400; ey(5)= 71340;
f_err(6)=17500; zet_err(6)=89240; ey(6)=9816;
f_err(7)=25000; zet_err(7)=57464; ey(7)= 4884;
%
% Plotten
%
hold on;
 grid on:
 title('Impedanz Single-Coil-Tonabnehmer');
```

```
xlabel('Frequenz / [Hz]');
 ylabel('Impedanz / [Ohm]');
 loglog(freq,z lemme,'r');
 loglog(freq,z chris,'k');
 loglog(fe,ze,'o');
 loglog(freq,zet_r,'g--');
 loglog(freq,zet_l,'m--');
 loglog(freq,zet_c,'c--');
 %loglogerr(f_err,zet_err,ey,"~");
 axis([10.,200000.,1000.,2000000.]);
 legend('Rechnung
                                      Lemme', 'Rechnung
Christiani', 'Messung', 'Ohmsche
                                    Tangente','Induktive
Tangente',
     'Kapazitive Tangente');
endfunction;
6 Frequenzgang des unbeschalteten Tonabnehmers
function tonabnehmer()
% Berechnung des Frequenzgangs des unbeschalteten
              L=3.8:
                         C1=1.3*10^(-10);
                                              j=sqrt(-1);
```

Tonabnehmers % R1=7160.: kmax=20000; Rv=500000; % Schleife über die Frequenzen und Berechnung der Verstärkung % for k=1:1:kmax kfeld(k)=k; om=2.*pi*k; z=1/((R1+j*om*L)*(j*om*C1+1/Rv)+1); ampfeld(k)=abs(z); end; % % PLotten des Frequenzgangs hold on; grid on; loglog (kfeld,ampfeld,"g","linewidth",2); grid on; grid minor; grid ("minor"); title("Frequenzgang des SC-Tonabnehmers"); xlabel("Frequenz / [Hz]"); ylabel("Verstärkungsfaktor/ [-]"); axis([100,kmax,10^(-1),10]); % endfunction;

7 Frequenzgang des Tonabnehmers mit kompletter Beschaltung

function ta_komplett() % % Frequenzgang des Tonabnehmers mit kompletter Beschaltung, Kabelkapazität und % Verstärkereingangswiderstand % % Elektrische Kennwerte R=7160.: R1=500000: R2=47000: R31=100000: R32=400000; Rp=500000; Rv=1000000 ;L=3.8; C=1.3*10^(-10); Cg=6.4*10^(-10); j=sqrt(-1); Ck(1)=5.895*10^(-9); Ck(2)=4.582*10^(-9); Ck(3)=3.527*10^(-9); Ck(4)=2.680*10^(-9); Ck(5)=2.000*10^(-9); Ck(6)=1.454*10^(-9); Ck(7)=1.016*10^(-9); Ck(8)=6.64*10^(-10); Ck(9)=1.54*10^(-10); Ck(10)=0; % hold on; grid on; kmax=5000; % % Schleife über die Zusatzkapazitäten for l=1:1:10 % Schleife über die Frequenzen for k=10:1:kmax kfeld(k)=k*10.; om=2.*pi*kfeld(k); Z1=R+j*om*L; Z2=1/(j*om*(C+Ck(I))+1/Rp+1/(R1+R2)); Z3=1/(1/Rv+j*om*Cg); % Berechnung der Gesamt-Übertragungsfunktion Z=1/((1+Z1/Z2)*(R31*(1/Z3+1/R32)+1)+Z1*(1/Z3+1/R32)); ampfeld(k)=abs(Z); end; % Plotten (innerhalb der Kapazitätsschleife) if(l==1) loglog(kfeld,ampfeld,"b","linewidth",2); endif if(l==2) loglog(kfeld,ampfeld,"m","linewidth",2); endif if(l==3) loglog(kfeld,ampfeld,"k","linewidth",2); endif if(l==4) loglog(kfeld,ampfeld,"c","linewidth",2); endif if(l==5) loglog(kfeld,ampfeld,"g","linewidth",2); endif if(l==6) loglog(kfeld,ampfeld,"r","linewidth",2); endif if(l==7) loglog(kfeld,ampfeld,"b--","linewidth",2); endif if(I==8) loglog(kfeld,ampfeld,"m--","linewidth",2); endif if(I==9) loglog(kfeld,ampfeld,"r--","linewidth",2); endif if(l==10) loglog(kfeld,ampfeld,"g--","linewidth",2); endif % Ende der Kapazitätsschleife end; % Plotten von Überschrift, Achsenbeschriftung und Legende title("Gesamt-Uebertragungsfunktion"); xlabel("Frequenz / [Hz]"); ylabel("Verstaerkungsfaktor/ [-]"); pF","C_k=4582 legend("C k=5895 pF","C k=3527 pF","C k=2680 pF","C k=2000 pF","C k=1454

pF","C_k=1016 pF","C_k=664 pF","C_k=154 pF","C_k=0 pF") axis([100,kmax*10,10^(-1),3.]); % endfunction;

8 Signal vor Tonabnehmer und am Ausgang

function signal_eingang_ausgang_sinus() % % Berechnung Saitenschwingung der an Tonabnehmerposition % und des Ausgangssignals % % Anzupfstelle, Tonabnehmerposition n=10; m=4; H=1; % Elektrische Kennwerte R=7160.; R1=500000; R2=47000; R31=10000; R32=490000; Rp=500000; Rv=1000000; L=3.8; C=1.3*10^(-10); Cg=6.4*10^(-10); j=sqrt(-1); Ck(1)=5.895*10^(-9); Ck(2)=4.582*10^(-9); Ck(3)=3.527*10^(-9); Ck(4)=2.680*10^(-9); Ck(5)=2.000*10^(-9); Ck(6)=1.454*10^(-9); Ck(7)=1.016*10^(-9); Ck(8)=6.64*10^(-10); Ck(9)=1.54*10^(-10); Ck(10)=0; % Waehlen des Zusatzkondensators I=1: f0=330; om0=2.0*pi*f0; kmax=200; sum=0; sum1=0; hold on: be=0.01; Ls=0.63; % Tonabnehmerbreite und Mensur % Zeitschleife for i=1:1:1000 tfeld(i)=i/100000; wfeld(i)=0; ufeld(i)=0; % Frequenzschleife for k=1:1:kmax % Spektralkoeffizienten bk1feld(k)=(2*H*n^2)/((n-1)*k^2*pi^2)*sin(k*pi/n); daeko=j*f0*0.2; % daeko=om0*0.; % Daempfung vernachlaessigt om=sqrt(k^2*om0^2-daeko^2/4); % Berechung der Uebertragungsfunktion Z1=R+j*om*L; Z2=1/(j*om*(C+Ck(l))+1/Rp+1/(R1+R2)); Z3=1/(1/Rv+j*om*Cg); Z=1/((1+Z1/Z2)*(R31*(1/Z3+1/R32)+1)+Z1* (1/Z3+1/R32)); amp=abs(Z); phase=arg(Z); % Fallunterscheidung fuer Berechnung von Signal vor TA und Ausgangssignal % Signal vor Tonabnehmer

```
sum=bk1feld(k)*cos(om*tfeld(i))*sin(k*pi/m)*exp(-
daeko*tfeld(i));
% Signal nach Tonabnehmer
sum1=amp*bk1feld(k)*sin(f0*2*pi*k*tfeld(i)+phase)*sin
(k*pi/m)*exp(-daeko*tfeld(i)) \
     *2*om/k*Ls/be/pi*sin(k*pi*be/Ls);
% Aufsummieren der Teilschwingungen
   wfeld(i)=wfeld(i)+sum; % Eingangssignal
   ufeld(i)=ufeld(i)+sum1; % Ausgangssignal
% Abspeichern von Grundschwingung Ausgangssignal
   if (k==1) u1feld(i)=sum1; endif;
% Abspeichern der Oberschwingungen 1 bis 7
Ausgangssignal
   if (k==2) u2feld(i)=sum1; endif;
   if (k==3) u3feld(i)=sum1; endif;
   if (k==4) u4feld(i)=sum1; endif;
   if (k==5) u5feld(i)=sum1; endif;
   if (k==6) u6feld(i)=sum1; endif;
   if (k==7) u7feld(i)=sum1; endif;
   if (k==8) u8feld(i)=sum1; endif;
 end;
end;
% Plotten
%
umax=max(ufeld);
wmax=max(wfeld);
grid on;
xlabel("Zeit t [ms]");
t1feld=tfeld*1000; % Skalierung in ms
plot(t1feld,wfeld/wmax,"-.-g", "linewidth", 4);
plot(t1feld,ufeld/umax,"b", "linewidth", 4);
plot(t1feld,u1feld/umax,"-m", "linewidth", 1);
plot(t1feld,u2feld/umax,"--m", "linewidth", 1);
plot(t1feld,u3feld/umax,"m", "linewidth", 1);
plot(t1feld,u4feld/umax,"r", "linewidth", 1);
plot(t1feld,u5feld/umax,"-r", "linewidth", 1);
plot(t1feld,u6feld/umax,"-.r", "linewidth", 1);
plot(t1feld,u7feld/umax,"-.-r", "linewidth", 1);
plot(t1feld,u8feld/umax,"--r", "linewidth", 1);
 ylabel("Signalamplituden [-]");
 title("Ausgangssignal bei Anregung bei L/10 und
Abnahme bei L/4");
legend('Eingangssignal','Ausgangssignal','Grundschwingu
ng','1. Oberschwingung','2. Oberschwingung',\
          Oberschwingung','4.
                                       Oberschwingung','5.
 '3.
Oberschwingung', '6. Oberschwingung', \
 '7. Oberschwingung');
 axis([0,10,-1.2,1.2]);
%
endfunction;
```

9 Spektralanalyse vor Tonabnehmer und am Ausgang

function vergleich_spektrum_330_OK_rechnung()
%
% Spektralkoeffizienten vor und nach dem TA
% und Uebertragungsfunktion im Vergleich mit Messung
% Anzupfstelle, Tonabnehmerposition

n=10; m=5; isc=1; H=1; ikorr=0; % % Elektrische Kennwerte Schaltung % R1=500000; R2=47000; R31=1000; R32=499000; Ck(1)=5.895*10^(-9); Ck(2)=4.582*10^(-9); Ck(3)=3.527*10^(-9); Ck(4)=2.680*10^(-9); Ck(5)=2.000*10^(-9); Ck(6)=1.454*10^(-9); Ck(7)=1.016*10^(-9); Ck(8)=6.64*10^(-10); Ck(9)=1.54*10^(-10); Ck(10)=0; % Waehlen des Zusatzkondensators I=10; % Größe des Fender-Kondensators Cf=1.0*10^(-9); % Verstärker Innenwiderstand Rv=1000000; % Kabelkapazität Cg=6.4*10^(-10); if(isc==1)% Elektrische Kennwerte SC R=7160.; Rp=500000; L=3.8; C=1.3*10^(-10); else % Elektrische Kennwerte HUM R=16000.; Rp=950000; L=12.6; C=1.0*10^(-10); end % % Frequenzauswahl und Skalierung % f0=330; om0=2.0*pi*f0; % Frequenz und Kreisfrequenz des Grundtons fg=20000; % Hoergrenze kg=round(fg/f0); % Grenze für die Anzahl der Eigenfrequenzen kmax=kg*10; i=0: be=0.025; % TA-Breite ls=0.63; % Mensur % % Frequenzschleife % for k=1:1:kmax kfeld(k)=k/10; % Verfeinerung der Schrittweite kpfeld(k)=kfeld(k)*f0; % Frequenzskala om=om0*kfeld(k); % Berechung der Uebertragungsfunktion j=sqrt(-1); Z1=R+j*om*L; Z2=1/(j*om*(C+Ck(I))+1/Rp+1/(R1+R2)); Z3=1/(1/Rv+j*om*Cg); R33=1./(1./R31+j*om*Cf); % Fender-Kondensator Z=1/((1+Z1/Z2)*(R33*(1/Z3+1/R32)+1)+Z1*(1/Z3+1/R32));

amp=abs(Z); ampfeld(k)=amp;

% Varianten für Dämpfungskorrektur if(ikorr==0)

% keine Dämpfung fkor=1.: elseif(ikorr==1) fkor=1/kfeld(k); % hyperbolische Dämpfung end; % Hilfskurve für die Auslöschungen durch die Tonabnehmerposition tafeld(k)=abs(sin(kfeld(k)*pi/m)); % Hilfskurve für die Auslöschungen durch die magnetische Apertur des TA mafeld(k)=abs(sin(pi*kfeld(k)*be/ls)); % Hilfsfeld für Anzupfstelle und AB bkfeld(k)=abs((2*H*n^2)/((n-1)*kfeld(k)^2*pi^2)*sin(kfeld(k)*pi/n)); % Hilfskurve für Signal vor TA bkhfeld(k)=abs(bkfeld(k)*tafeld(k)); Spektralkoeffizienten am Gitarrenausgang % auf verfeinertem Raster skfeld(k)=fkor*ampfeld(k)*bkfeld(k)*tafeld(k)*mafeld(k); % Berechnung nur für Eigenschwinungsfrequenzen i++; if(i==10) i=0; % Spektralkoeffizienten am TA bei Eigenfrequenzen bk0feld(k)=bkhfeld(k); % Spektralkoeffizienten am Gitarrenausgang bei Eigenfrequenzen sk1feld(k)=skfeld(k); end; end; % % Ende Frequenzschleife % % Skalierung der berechneten Kurven skal sk1=max(sk1feld); skal bk0=max(bk0feld); skal sk = max(skfeld); skal bkh = max(bkhfeld); for k=1:1:kmax bk0feld(k)=bk0feld(k)/skal_bkh; sk1feld(k)=sk1feld(k)/skal_sk; skfeld(k)=skfeld(k)/skal sk; bkhfeld(k)=bkhfeld(k)/skal_bkh; end % Verarbeiten der Audiodatei nach [28] [y,fs] = wavread('TESTDATEIN_15_02\TA_5_A_10.wav'); % Lade Audio-Datei N = 5000; % Anzahl der Datensätze für FFT Na =30000; % Anfang des Abtastintervallsstelle s = y(Na:Na+N-1); % Auswahl von N Datensätzen aus der Audiodatei S=fft(hamming(length(s))'.*s,N); % Diskrete Fouriertransformation mit Cosinus-Fenster L = length(S)/2;% Anzahl der Frequenzen f = 0:L-1; % Frequenzbereich dimensionslos f = f*fs/length(S); % Frequenzbereich in Hz maxS=max(abs(S)); % Skalierungsfaktor für gemessenes Spektrum % Plotten hold on;

grid on; title("Vergleich des Ausgangsspektrums mit Rechnung -Anregung bei L/10 und Tonabnehmer bei L/5, SC, OK, ungedaempft"); xlabel("Frequenz / [Hz]"); ylabel("Spektralkoeffizienten und Uebertragungsfunktion / [-]"); axis([100,kmax/10*f0,5.*10^(-4),10]); loglog (f(1:L) ,abs(S(1:L)/maxS) ,"b<-","linewidth", 2);</pre> loglog (kpfeld,ampfeld,"m-", "linewidth", 2); loglog (kpfeld,bk0feld/1.,"go","linewidth", 2) ; loglog (kpfeld,bkhfeld/1.,"g--") ; loglog (kpfeld,sk1feld,"r^","linewidth", 2); loglog (kpfeld,skfeld/1.,"r--","linewidth", 2) ; loglog (kpfeld,tafeld,"k--"); loglog (kpfeld,mafeld,"c--"); "Messung 30000/5000 legend (Fenster", "Uebertragungsfunktion TA", "Spektrum ueber TA", "Hilfskurve Eingangssignal", \ "Spektrum Ausgangssignal","Hilfskurve Ausgangssignal", "Ausloeschung TA", \ "Ausloeschung TA-Breite"); hold off; % endfunction; 10 Darstellung des Audio-Signals function signal laenge() [y,fs] = wavread('TESTDATEIN_15_02\TA_5_A_10.wav'); % Lade Audio-Datei fprintf('Abtastfrequenz fs = %g\n',fs); fprintf('Länge des Datenvektors der wav-Datei = %i\n',length(y)); N =30000; Na=500; % Anzahl der Datensätze für FFT s = y(N:Na+N-1);% Auswahl von N Datensätzen aus der Audiodatei hold on; smax=abs(max(s)); t =(0:length(s)-1)/fs; % time plot(t*1000,s/smax,"b"); grid on; title ("Audiosignal - SC, OK, f_0=330 Hz"); xlabel('Zeit [ms] \rightarrow'); ylabel('Signalamplitude [-] \rightarrow'); endfunction; 11 Berechnen der Halsdurchbiegung function halsbiegung2() % % Berechnen der Halsdurchbiegung mit % unterschiedlichem Querschnitt % Sges=448.3; % Gesamtkraft

s=0.0022; % Steghöhe n=1000; % Teilschritte für num. Lös.

% Selbstgebaut - Geometriedaten

h1=0.032: h11=0.022; b1=0.042; Lh=0.384; E1=11700*10^6; % E-Modul von Eiche % Dreieckige Halsform A(1)=(6*(h1+3*s)*Sges)/(E1*b1*h1^3); % Parabolische Halsform ly1=8/175*b1*h1^3; hs1=0.4*h1; A(2)=((hs1+s)*Sges)/(2*E1*ly1); % Elliptische Halsform ly2=0.10976*b1*h1^3; hs2=0.4244*h1; A(3)=((hs2+s)*Sges)/(2*E1*ly2); hold on; wnfeld(1:2)=0; % Anfangsbedingungen num. Lös. % Schleife über Querschnittsformen for k=1:1:4 for i=1:1:n xfeld(i)=Lh/n*i; if (k<4) wfeld(i)=A(k)*xfeld(i)^2*1000; end: if (i>2 && k==4) % Numerische Lös. hx=0.0325-0.0035*i/n; bx=0.0575-0.016*i/n; hsx=0.4244*hx; lynum=0.10976*bx*hx^3; Anum=((hsx+s)*Sges)/(2*E1*lynum); wnfeld(i)=2*wnfeld(i-1)-wnfeld(i-2)+Anum*(Lh/n)^2*1000; end: end; % PLOTTEN grid on; if (k==1) plot(xfeld, wfeld, "r", "linewidth",2); end; if (k==2) plot(xfeld,wfeld, "g","linewidth",2); end; if (k==3) plot(xfeld,wfeld, "b","linewidth",2); end; if (k==4) plot(xfeld,wnfeld, "c","linewidth",2); end; title("Halsbiegung - Querschnittseinfluss"); legend("Dreieckige Form","Parabelsegment","Halbellipse",\ "Halbellipse mit Verdickung"); xlabel("Halslaenge [m]"); ylabel("Durchbiegung [mm]"); end; endfunction; 12 Berechnung der Saitenspannung

function saiten_kraft() % %Berechnen der Kraft der Saiten auf die Gitarre % zoll=0.0254; rho=8000; L=0.63: %Saitenstärken d(1)=zoll*0.01; dw(1:3)=0; dk(1:3)=0; d(2)=zoll*0.013; d(3)=zoll*0.017; % Beruecksichtigung der Umwicklung d(4)=zoll*0.026; dw(4)=0.00014; dk(4)=0.00038; d(5)=zoll*0.036; dw(5)=0.00025; dk(5)=0.00042; d(6)=zoll*0.046; dw(6)=0.000344; dk(6)=0.00048; hold on; grid on; % Schleife über die Saitendurchmesser for i=1:1:6 % fuer umwickelte Saiten $Aeff=pi^{(i)^2+(dk(i)+dw(i))*pi^{(i)}/4;$ deff=(dk(i)^2+(dk(i)+dw(i))*pi*dw(i))^0.5; fprintf("deff=%g\n",deff); % Querschnittsflaeche fuer unumwickelte Saiten A=pi/4*d(i)^2; % Schleife über die Frequenzen for k=50:1:400 kfeld(k)=k; % Frequenzfeld Sfeld(k)=rho*A*(2*L*k)^2; % Kraftfeld if (i==1 & k==330) Se=Sfeld(k); end; % Saitenkräfte if (i==2 & k==247) Sh=Sfeld(k); end; if (i==3 & k==196) Sg=Sfeld(k); end; if (i==4 & k==147) SD=Sfeld(k); SDeff=rho*Aeff*(2*L*k)^2; end; (i==5 SA=Sfeld(k); if & k==110) SAeff=rho*Aeff*(2*L*k)^2; end; (i==6 SE=Sfeld(k); if & k==82) SEeff=rho*Aeff*(2*L*k)^2; end; end; % Plotten axis ([50,400,1,10^3]); if (i==1) semilogy(kfeld,Sfeld,"r"); semilogy(330,Se,"ro", "linewidth",2); disp(Se); end; if (i==2) semilogy(kfeld,Sfeld,"g"); semilogy(247,Sh,"go", "linewidth",2); disp(Sh); end; if (i==3) semilogy(kfeld,Sfeld,"b"); semilogy(196,Sg,"bo", "linewidth",2); disp(Sg); end; if (i==4) semilogy(kfeld,Sfeld,"m"); semilogy(147,SD,"mo"); semilogy(147,SDeff,"mx", "linewidth",2); disp(SD); disp(SDeff); end; if (i==5) semilogy(kfeld,Sfeld,"c"); semilogy(110,SA,"co"); semilogy(110,SAeff,"cx", "linewidth",2); disp(SA); disp(SAeff);end; if (i==6) semilogy(kfeld,Sfeld,"k"); semilogy(82,SE,"ko"); semilogy(82,SEeff,"kx", "linewidth",2); disp(SE); disp(SEeff); end; end; Sges=Se+Sh+Sg+SDeff+SAeff+SEeff title("Saitenkraefte"); xlabel("Frequenz [Hz]"); ylabel("Kraft [N]"); legend ("010","e","013","h","017","g","026","D","D_u_m","036" ,"A","A_u_m","046","E","E_u_m"); endfunction;

10 Literatur

Die unten angeführten Literaturstellen sind in der Reihenfolge angegeben wie sie im Text erstmalig auftreten. Das gilt auch für die zitierten Internetseiten und Bildquellen.

[1] Lemme, H.: Elektrogitarren, neue, überarbeitete Auflage, Elektor-Verlag, Aachen, 2006

[2] Internetseite: Bild von Leo Fender http://www.fenderplayersclub.com/home/images/leo_fender.jpg (14.02.09)

[3] Internetseite: Auszug aus Patentschrift von Leo Fender <u>http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/f0/Fenderguitarpatentsketch</u>

[4] Internetseite: Bild einer Fender Telecaster http://images4.thomann.de/pics/bdb/220737/1118475_800.jpg

[5] Internetseite: Bild einer Fender Stratocaster http://images4.thomann.de/pics/bdb/109661/858919_800.jpg

[6] Internetseite: Bild einer Gibson Les Paul http://images4.thomann.de/pics/bdb/193696/1182297_800.jpg

[7] Internetseite: Bild einer Gibson SG http://images4.thomann.de/pics/bdb/132373/566292_800.jpg

[8] Internetseite: Aufbau einer E-Gitarre http://www.musikschule2000.de/bilder/facharbeit/Image1.gif

[9] Bestle, D.: Vorlesungsmanuskript Technische Mechanik III, Statik und Festigkeitslehre, WS 2008/2009, Brandenburgische Technische Universität Cottbus, S. 32

[10] Geretschläger, R., Griesel H., Postel H.: Elemente der Mathematik 8, E. Dorner Verlag, Wien, 2007

[11] Internetseite: Lehrklänge, Online-Lehrgang für Musiktheorie <u>http://www.lehrklaenge.de/assets/images/Verh01a02.jpg</u> (15.02.09)

[12] Greiner, W.: Theoretische Physik, Band 2: Mechanik II, 4. Überarbeitete und erweiterte Auflage, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1986, S. 108

[13] Fletcher, N. H., Rossing, T.D.: The Physics of Musical Instruments, Second Edition, Springer, New York, 1998, S. 44

[14] Internetseite: Karls, M., Armstead, D.: Does The Wave Equation Really Work? www.bsu.edu/web/mkarls/INMAATalk.ppt (14.02.09)

[15] Internetseite: Smith III, J. O.: Physical Audio Signal Processing, Online book: <u>http://www.dsprelated.com/dspbooks/pasp/Damped_Plucked_String.html</u> (19.12.2008) [16] Internetseite: Bild verschiedener Tonabnehmerbauweisen http://www.gitarren-sammler.de/images/tipps.2.gif (14.02.09)

[17] Linse, H.: Elektrotechnik für Maschinenbauer, 6. Auflage, B.G. Teubner Verlag, Stuttgart, 1979

[18] Eaton, J. W., Bateman, D., Hauberg, S.: GNU Octave version 3.0.2, Free Software Foundation, Boston, 2007

[19] Internetseite: Christoph Caspari: Vermessung von Tonabnehmern <u>http://www.elektronikinfo.de/audio/egmessung.htm</u> (15.01.09)

[20] Internetseite: Physikalische Institute der Uni Stuttgart: http://www.physik.unistuttgart.de/media/praktika/ap/pdf_dateien/Allgemeines/Fehlerrechnung.pdf (15.01.09)

[21] Tietze U., Schenk, Ch.: Halbleiterschaltungstechnik, 5. Auflage, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1980, S. 293

[22] Schreier, E.: Schwingungslehre in Kursstufe 12, Zulassungsarbeit, Tübingen, 2003, S. 27

[23] Koch, M.: E-Gitarrenbau, Eine Selbstbauanleitung, 2. Erweiterte Auflage, Eigenverlag: Martin Koch, A-8200 Gleisdorf, Hartbergerstraße 22, 1999, S. 44

[24] Jaros, A., Nussbaumer, A., Nussbaumer, P.: Basiswissen Physik – compact Band 3, öbv hpt Verlag, Wien, 2002, S. 69

[25] Internetseite: Mc Donald, K.T.: Electric Guitar Pickups http://www.physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/guitar.pdf (14.02.09)

[26] Bronstein, I.N. und Semenjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik, 14. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Zürich und Frankfurt/Main, 1974, S. 157

[27] Internetseite: Das Klang-Mysterium der Humbucker-Modes http://www.guitarworld.de/forum/das-klang-mysterium-der-humbucker-modes-t10766.html

[28] Werner, M.: Signale und Systeme, Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen,3. Auflage, Vieweg+Teubner Verlag, 2008, S. 145

[29] Day, P., Rebellius, R. (Hrsg.) und Waldenmaier, A.: E-Gitarren Alles über Konstruktion und Historie, 2. aktualisierte Auflage, Carstensen Verlag, München, 2007, S. 28

[30] Bestle, D.: Vorlesungsmanuskript Technische Mechanik I, Statik und Festigkeitslehre, WS 2008/ 2009, Brandenburgische Technische Universität Cottbus, S. 46

[31] Internetseite: Wikipedia http://de.wikipedia.org/wiki/Reibungskoeffizient (15.02.09)

[32] Internetseite: Bild von Schneckengetriebe http://www.tedata.com/uploads/pics/3k_9t_2_i05.gif

[33] Internetseite: Bild Bassmechanik http://www.thomann.de/de/schaller_bml_nickel_single_machine_head.htm [34] Masow, O., Ahrens, M.: Einfluss der Saitenspannung auf das Schwingungsverhalten der Saite, Wettbewerb "Jugend forscht", Christian-Gymnasium, Hermannsburg, BRD, 1999

[35] Wagenführ, R., Scheiber, Chr.: Holzatlas, 2. Auflage, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1985, S. 438 und S. 244

[36] Internetseite: Flächenträgheitsmomente http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8d/L-Traegheitsmomente2.png

[37] Grimsehl E.: Lehrbuch der Physik, Band I, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 19. Auflage, 1965, S. 414

[38] Internetseite: Hess, Wolfgang: Grundlagen der Sprachsignalverarbeitung, Vorlesungsmanuskript, Institut für Kommunikationswissenschaften, Universität Bonn <u>http://www.ikp.uni-bonn.de/dt/lehre/materialien/grundl_ssv</u> (14.02.09)

[39] Raffaseder, Hannes: Audiotechnik und Design, Vorlesung Audio-/Videotechnik I, FH St. Pölten, WS 2004

[40] Internetseite: J. D. Tillman, Response Effects of Guitar Pickup and Width <u>http://www.till.com/articles/PickupResponse/index.html</u>

Arbeitsprotokoll	
12.11.08	Besprechung des Grundaufbaus mit Betreuungslehrerin
19.11.08	Saitenschwingung
22.11.08	Elektronik
02.12.08	Messergebnisse und erste Niederschrift mit Betreuungslehrerin besprochen
06.12.08	Fortschritte beim Bau der E-Gitarre
24.12.08-	(Weihnachtsferien) Fräsen des Elektronikfachs, Lackieren der Gitarre, Berechnen des
06.01.09	Saitenzugs
23.01.09	Berechung der Durchbiegung des Halses
26.01.09	Fertigstellung der E-Gitarre (Einbau und verlöten der Schaltung, Bundschlitze sägen
	und Bünde einsetzen, Montage der Mechaniken und Brücke)
28.01.09	Fertigstellung des Mechanik Kapitels
01.02.09	Aufnahme von wave-Datein mit der Selbstgebauten Gitarre und Vergleich mit der Rechung bei unterschiedlicher Tophöhe und Topabnehmertyn
	Rechang ber unterschiedlicher formone und fonablienmertyp
06.02.09	Besprechung mit Betreungslehrer, Aufnahmen von wave-Dateien zur Untersuchung
	des Einflusses der Anzupfstelle und der Tonabnehmerposition
07.02.09	Fertigstellung des Kapitels "Geschichte der E-Gitarre"
08.02.09	Überarbeitung des Tonabnehmer Kapitels
10.02.09	Besprechung des Fortschritts mit Betreungslehrerin
12.02.09	Schreiben des Vorworts
14.02.09	Überarbeitung der Übertragung vom akustischen zum elektrischen Signal
15.02.09	Aufnahme von neuen Messdateien
16.02.09	Auswertung der Messdaten, Abschließen des Kapitels "Messung der Klangspektren
	und Vergleich mit der Theorie", Schreiben der Zusammenfassung, Formatierung
20.02.09	Überarbeiten der Endversion

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit selbstständig von mir verfasst wurde und keine anderen als die gekennzeichneten Quellen verwendet wurden. Außerdem sind alle Abbildungen von mir erstellt worden, soweit dies nicht anders gekennzeichnet ist.

Judendorf den 26.02.2009

Lukas van Berg