

# **Bericht über Bremstests mit einem Eigenbau-Radanhänger zur Klärung der Belastbarkeit der aus AlMgSi05 gefertigten Deichsel**

Eberhard u. Lukas von Berg

November 2014

## 1 Einleitung

Für Fahrradanhänger ist ein niedriges Eigengewicht von Vorteil, weshalb in vielen kommerziellen Bauformen Aluminium als Werkstoff für den Rahmen und Textilbespannungen für die Seitenwände verwendet werden. Daher wurde für einen Eigenbau-Fahrrad-Lastenanhänger ebenfalls diese Vorgangsweise gewählt. Die Anhängerdeichsel wurde dabei aufgrund einer sehr groben, überschlägigen Auslegung aus einem Rohr mit 25 mm Aussendurchmesser und 2 mm Wandstärke aus AlMgSi05 angefertigt. Wegen im Nachhinein aufgekommener Sicherheitsbedenken wurden die im folgenden dargestellten Bremstests durchgeführt, wobei die Deichsel bereits nach wenigen Tests gebrochen ist. Daraufhin wurden Berechnungen zur Belastung beim Bremsen sowie den zu erwartenden maximalen Spannungen angestellt. Die Rechenergebnisse wurden mit der Streckgrenze und der Biegezugfestigkeit verglichen, woraus hervorgeht, dass die gewählte Deichsel nicht betriebsicher ist. Ein möglicher Versagensmechanismus wird diskutiert und abschließend werden Verbesserungsvorschläge zur Erhöhung der Deichselsicherheit angegeben.

## 2 Messtechnik

Für die Bremstests wurde die Deichsel mit einer Wägezelle (Bosche S40S) zur Normalkraftmessung instrumentiert (Abb. 1) und ein Hallgeber zur Ermittlung der Fahrgeschwindigkeit und der Beschleunigungen sowie des Fahrwegs am linken Anhängerrad angebracht. Weiter sollten die Spannungen an den kritischen Querschnitten (1. und 2. Biegung der Deichsel) mittels Dehnungsmesstreifen durch je zwei temperaturkompensierte Halbbrückenschaltungen ermittelt werden. Damit sollten die dort kombiniert auftretenden Biege- und Normalspannungen erfasst werden, was aber wegen frühzeitigem Bruch der Deichsel in den Vortests nicht umgesetzt werden konnte.

Das Signal der Wägezelle wurde über einen Messverstärker (Bosche WTE) an den Analog-Eingang eines Arduino-Mikroprozessors gegeben. Für die Verarbeitung der DMS-Signale wurde bereits eine Schaltung zum Brückenabgleich und zur Verstärkung mittels Linear-IC's INA125P entworfen und unter Verwendung von Ersatzwiderständen für die DMS-Halbbrücken getestet (Abb. 2). Die Signale von Hallgeber sowie die vorverstärkten DMS-Brückensignale wurden auf weitere analoge Eingänge des Arduino-Chips gegeben. Um ausreichend Daten während der Messfahrten speichern zu können, wurde der Arduino-Prozessor mit einem Speichershield ergänzt, auf den die Datensätze in Blöcken zu 50 Zeilen ausgeschrieben wurden. Durch die Technik des blockweisen Schreibens aus dem Arduino-Arbeitsspeicher konnte eine sehr hohe Datenrate mit einem Aufnahmeintervall von 3-5 ms erzielt werden, die allerdings regelmäßig von Schreibpausen von etwa 40 ms unterbrochen wurde.

Die komplette Elektronik samt Stromversorgung wurde in einer Stapelbox verpackt, auf dem Gepäckträger des Zugrads montiert und mit den Messleitungen von Hallgeber und Wägezelle verbunden (Abb. 3 bis 5). Die DMS wurden für die ersten Testfahrten noch nicht aufgeklebt.



Abb. 1: Wägezelle mit montierten Anschlußstücken

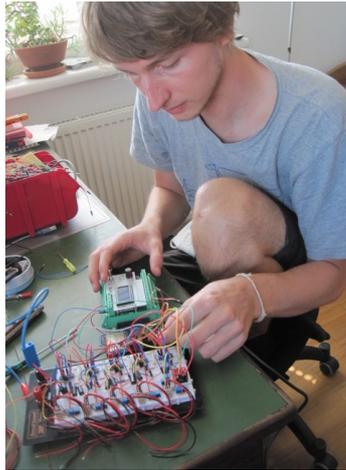


Abb. 2: Test der Messverstärkerschaltung



Abb. 3: Wägezelle montiert

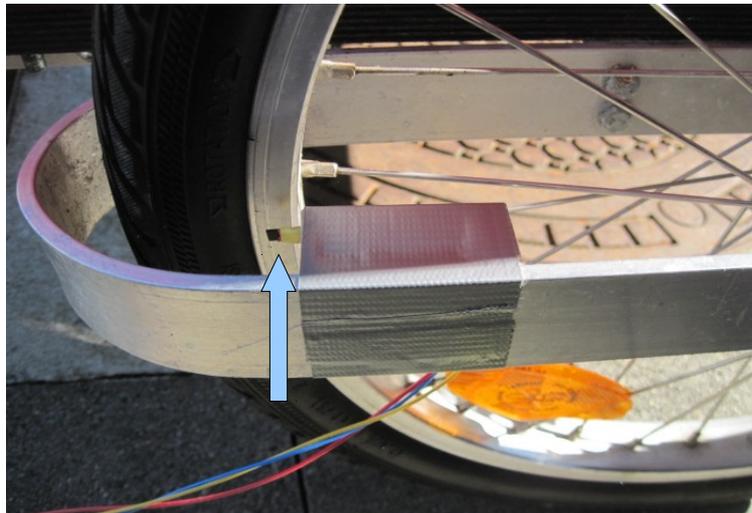


Abb. 4: Hallgeber angesteuert über 2 Magnete an der Felge



Abb. 5: Beladener Anhänger

### 3 Testbedingungen

Der Anhänger wurde mit einer Kiste Bier und einer PKW-Bremsscheibe aus der Schrottkiste beladen. Damit ergab sich eine Nutzlast von 30,6 kg, was circa 75% der gewünschten Nenn-Nutzlast von 40 kg ausmacht, die etwa dem Transport von zwei Kisten Bier entspricht. Der Anhänger mit modifizierter Deichsel wog 13,8 kg, so dass sich ein Gesamtgewicht von  $m_2=44,4$  kg ergab. Als Testrad wurde ein älteres Damenrad mit vor kurzem frisch montierten Bremsbacken verwendet. Daher war zu erwarten, dass die nach der steirischen Fahrradverordnung vorgeschriebene minimale Bremsverzögerung von  $a=4$  m/s<sup>2</sup> erreicht werden kann. Eine Handabschätzung zeigt, dass die Bremskraft dann wegen  $m \cdot a$  etwa 180 N und bei  $a=5$  m/s<sup>2</sup> etwa 220 N betragen sollte. Die Tests wurden auf einem ebenen Strassenstück von etwa 100 m Länge durchgeführt.

#### 4 Rechenmodell für den Abbremsvorgang

Um den Bremsvorgang etwas genauer zu beschreiben, wurde ein einfaches Zweikörper-Rechenmodell erstellt, das aus gebremster Radmasse und der mit einer Feder angekoppelten Hängermasse besteht. Die Steifigkeit der Kopplung wurde durch Hintereinanderschaltung der Deichselsteifigkeit und der Kupplungsfedersteifigkeit ermittelt. Weiter wurde eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskraft angenommen.

Abb. 6 zeigt das einfache Zweikörpermodell von Rad und Anhänger mit den angreifenden Kräften, wobei Index 1 das Rad und Index 2 den Anhänger bezeichnen, die jeweils die um die Deichsellänge  $l$  versetzten Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$  besitzen. Die Massen werden mit  $m$ , die Kräfte mit  $F$ , die Federkonstante der Kopplung zwischen den Massen mit  $c$ , die Dämpfungskonstante mit  $d$  und die Geschwindigkeiten mit  $u$  bezeichnet. Das gebremste Rad wird als gleitender Körper idealisiert, die am Anhängerrad noch angreifenden Rollreibungskräfte werden als klein gegen die Bremskraft angesehen und vernachlässigt.

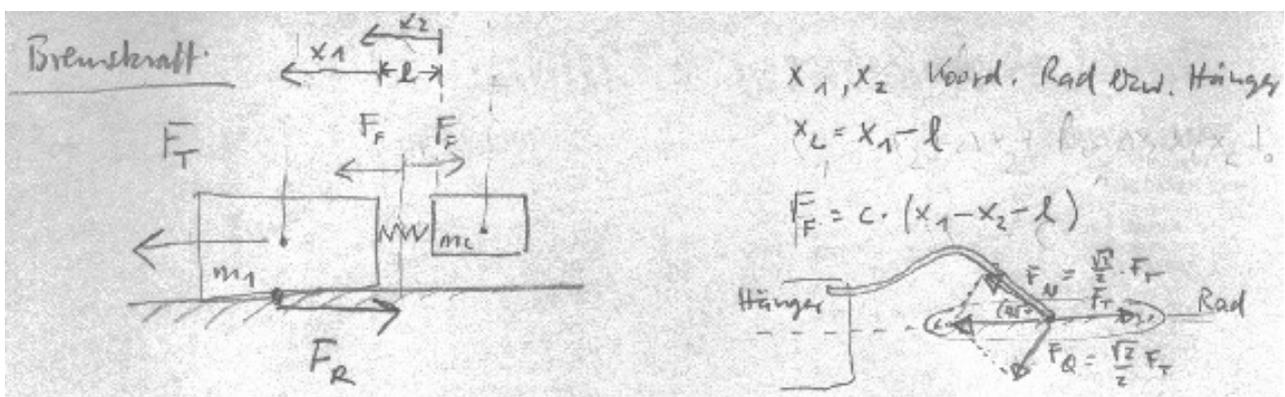


Abb. 6: Skizze zum simplen Zweikörpermodell für gebremstes Rad mit Anhänger

Es wurden die folgenden Modellgleichungen verwendet. Zunächst gilt für das Gesamtsystem das Gleichgewicht aus Trägheitskraft und Reibungskraft, die gleich der mittleren Bremsverzögerung  $a$  mal der Gesamtmasse gesetzt werden kann, wenn man für  $a$  die von der Fahrradverordnung verlangte Mindest-Bremsverzögerung bzw. gemessene Werte setzt.

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} = -F_R = a(m_1 + m_2) \quad (1)$$

Die Bewegungsgleichung für das Fahrrad erhält man, wenn man das System zwischen den Einzelmassen auftrennt und dafür als Schnittkräfte die Federkraft  $F_F$  und die Dämpfungskraft  $F_D$  anbringt. Am Fahrrad mit der Masse  $m_1$  steht dann die Trägheitskraft im Gleichgewicht mit der Bremsverzögerung, sowie mit der Federkraft und der Dämpfungskraft der Kupplung (in Abb. 6 nicht eingezeichnet, parallel zur Federkraft angreifend).

$$m_1 \ddot{x}_1 = -F_R - c(x_1 - x_2 - l) - d(u_1 - u_2) \quad (2)$$

Am Anhänger mit der Masse  $m_2$  wirken neben der Trägheitskraft noch die entsprechenden negativen Schnittkräfte des Fahrrades

$$m_2 \ddot{x}_2 = c(x_1 - x_2 - l) + d(u_1 - u_2) \quad (3)$$

Bei Bremsbeginn ( $t=0$  s) gelten die Startbedingungen

$$x_{10}=0 \text{ und } x_{20}=x_{10}-l \text{ sowie } u_{10}=u_{20}=u_0, \quad (4)$$

wobei die Geschwindigkeit  $u_0$  beim Einleiten der Bremsung aus den Messungen zu etwa 7 m/s bestimmt wurde. Setzt man

$$\dot{x}_1=u_1 \text{ und } \dot{x}_2=u_2 \text{ sowie } \ddot{x}_1=\dot{u}_1 \text{ und } \ddot{x}_2=\dot{u}_2 \quad (5)$$

so erhält man das folgende Gleichungssystem,

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d/m_1 & d/m_1 & -c/m_1 & c/m_1 \\ d/m_2 & -d/m_2 & c/m_2 & -c/m_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a(1+m_2/m_1)+c \cdot l/m_1 \\ -c \cdot l/m_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

das mit dem freien Matlab-Clone Octave gelöst wurde (Code siehe Anhang I).

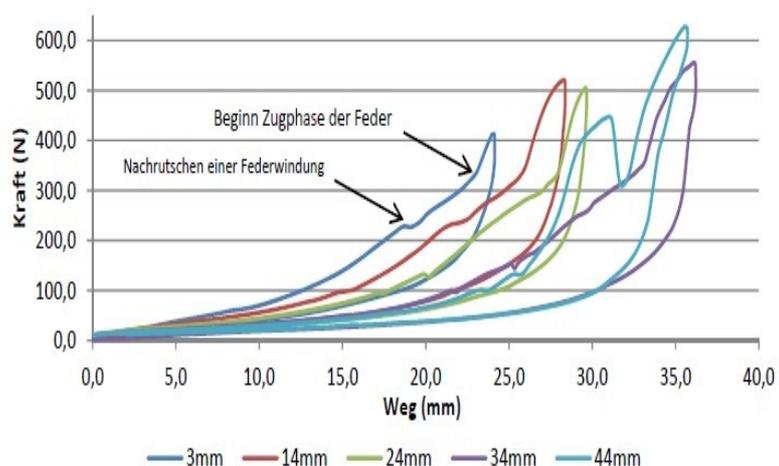
Mit einer angenommenen Masse von 90 kg für Rad+Fahrer und 44 kg für den Hänger sowie den unten diskutierten Steifigkeiten und Dämpfungskonstanten erhält man daraus die Geschwindigkeits- und Wegkurven von Rad und Hänger sowie die Deichselkraft und die Relativbewegung zwischen Rad und Hänger. Unsicherheiten bestehen bezüglich der Gesamtsteifigkeit  $c$  der Kopplung sowie bezüglich der Dämpfungskonstante  $d$ . Die Steifigkeit der Kopplung zwischen den Massen lässt sich durch Hintereinanderschaltung der Deichselsteifigkeit  $c_D$  und der Kupplungsfedersteifigkeit  $c_F$  durch reziproke Mittelung bestimmen.

$$c = c_D \cdot c_F / (c_D + c_F) . \quad (7)$$

Die Steifigkeiten und die Dämpfungskonstante müssen aus Messungen bestimmt oder parametrisiert werden.



a)



b)

**Abb. 7:** a) Anhängerkupplung, b) Kraft-Weg-Diagramme der in Fahrtrichtung beanspruchten Kupplung aus der BA von K. Huber (die grüne Kurve, obere Linie wird herangezogen)

In einer von K. Huber 2013 an der TU Graz durchgeführten Bachelor-Arbeit werden für eine weitgehend baugleiche Radanhängerdeichsel, die in einem Sozialprojekt verwendet wurde (Beschäftigungsprojekt für arbeitslose Roma), Versuche zur Ermittlung der Deichselsteifigkeit beschrieben (K. Huber, Versuchs- und simulationsgestützte Beschreibung und Optimierung eines Fahrradanhängers, TU Graz, 2013). Aus Druckversuchen wird darin ein Wert von  $c_D=53000$  N/m für die Deichselsteifigkeit ermittelt und für die Kupplungsfeder (s. Abb. 7a)) abhängig von der wirksamen Federlänge ein Diagramm angegeben, das eine progressive Federwirkung ab etwa 100 N Zugkraft zeigt (s. Abb. 7b)). Die Feder wirkt dabei wegen der 45-Grad-Anlenkung vor allem als Biegefeder. Bis 100 N ergeben sich aus dem Diagramm z.B. bei 24 mm freier Federlänge, wie sie in den hier beschriebenen Tests vorlag, etwa 5000 N/m, darüber im Bereich bis zu etwa 300 N Zugkraft steigt der Wert bis auf etwa 20000 N/m.

Aus den Kraftmessungen der unten beschriebenen Bremstests kann man aus der Periode der auftretenden Kraftpeaks ebenfalls auf die Federkonstante des gekoppelten Systems zurückschließen. So ergeben sich dort z.B. aus Abb. 13 aus den Kurven für Test B3 (lila) zwischen 5 und 10 s etwa 8 Schwingungen, was auf eine Schwingungsdauer von 0.625 s führt. Aus dem in Abb. 14 sichtbaren Nachschwingen des Hängers nach Stillstand erhält man aus der Differenz der Peaks der Versuche B2 (gelb) bzw. B4 (schwarz) eine Periode der gedämpften Schwingung von etwa 0.72 s. Weiter kann man aus den Amplitudenabsenkungen der Kraftpeaks nach Stillstand über das logarithmische Dekrement, das zu  $\ln(27 \text{ N} / 14 \text{ N})=0.66$  abgeschätzt wurde, die Dämpfungskonstante  $d$  der Ankopplung ermitteln. Aus den Gleichungen für die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung

$$\frac{2\pi}{T_d} = \sqrt{\frac{c}{m_2} - \left(\frac{d}{2m_2}\right)^2} \quad (8)$$

und der Definitionsgleichung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$

$$\Lambda = \ln\left(\frac{F_k}{F_{k+1}}\right) = T_d \frac{d}{2m_2} \quad (9)$$

(nach P. Kurzweil, Physik-Formelsammlung, 2. Auflage, Vieweg, 2009, S. 171 ff) erhält man bei bekannter Schwingungsdauer  $T_d$  und bekanntem Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Kraftamplituden  $F_k$  und  $F_{k+1}$  die Federkonstante  $c$  und die Dämpfungskonstante  $d$  zu

$$c = \frac{m_2}{T_d^2} \left( 4\pi^2 + \left[ \ln\left(\frac{F_k}{F_{k+1}}\right) \right]^2 \right) \quad (10)$$

und

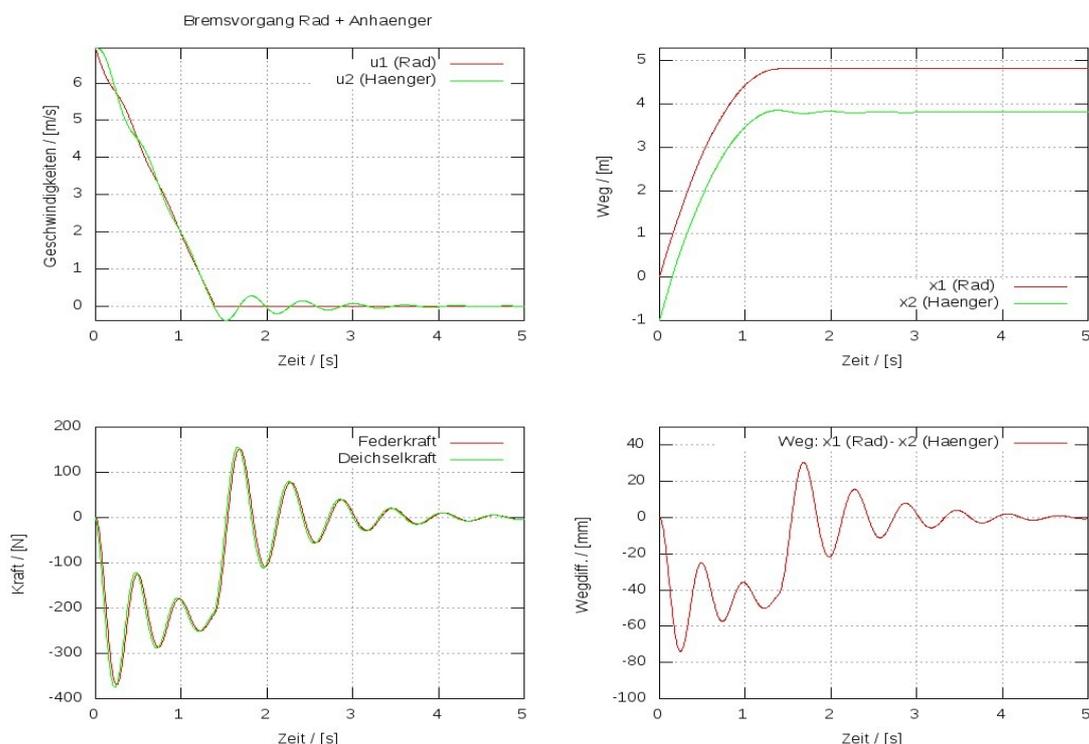
$$d = \frac{2m_2}{T_d} \ln\left(\frac{F_k}{F_{k+1}}\right) \quad (11)$$

Ergebnisse verschiedener Steifigkeitskombinationen, die nach den obigen Gleichungen berechnet oder gemessen wurden, sind in der untenstehenden Tabelle dargestellt. Man erkennt aus den Resultaten, dass eine Gesamtsteifigkeit von etwa 5000 N/m sowohl mit den BA-Messungen als auch mit den Schwingungen der Kraftsignale in den durchgeführten Bremstests gut zusammenpasst. Dieser Wert wurde daher in den Rechnungen mit dem Zweikörpermodell als typischer Wert verwendet. Als eher extremer Vergleichswert wurden noch der Fall 3 mit  $c=14500$  N/m gerechnet.

Dabei wurden jeweils Dämpfungswerte von 100 Ns/m und 200 Ns/m (starke Dämpfung) eingesetzt (Gl. (11)). Die innere Deichselsteifigkeit trägt genau genommen nicht zu den äußeren Kraftwirkung auf die Deichsel bei, sie wird lediglich für die vereinfachte Betrachtung der Massenkopplung im Zweikörpermodell benötigt. Die Steifigkeit der Deichsel ist aber gegenüber der Kupplungsfeder eher groß, so dass man die Deichselsteifigkeit auch in guter Näherung bei der hier vorliegenden Hintereinanderschaltung vernachlässigen kann.

Fall	T	$\Lambda$	$c_K$	$c_D$	c	d
	[s]	[-]	[N/m]	[N/m]	[N/m]	[Ns/m]
1	-	-	5000	53000	4570	-
2	-	-	12500	53000	10100	-
3	-	-	20000	53000	14500	-
4 (aus Bremstests)	0.72	0.66	-	-	3388	80
5(aus Bremstests)	0.63	0.66	-	-	4496	93

Abb. 8-1 bis 8-4 zeigen die zugehörigen Rechenergebnisse. Man erkennt als Hauptresultat aus diesen Bildern einerseits, dass sich die Bremskraft im Mittel auf den aus der Handabschätzung bestimmten Wert einschwingt. Andererseits findet jedoch in allen Fällen ein starkes Überschwingen statt, was kurzfristig deutlich höhere Kraftamplituden bewirken kann als via Handabschätzung berechnet wurde. Das weist schon auf einen kritischen Bereich im Hängerbetrieb bei starken Bremsungen hin.

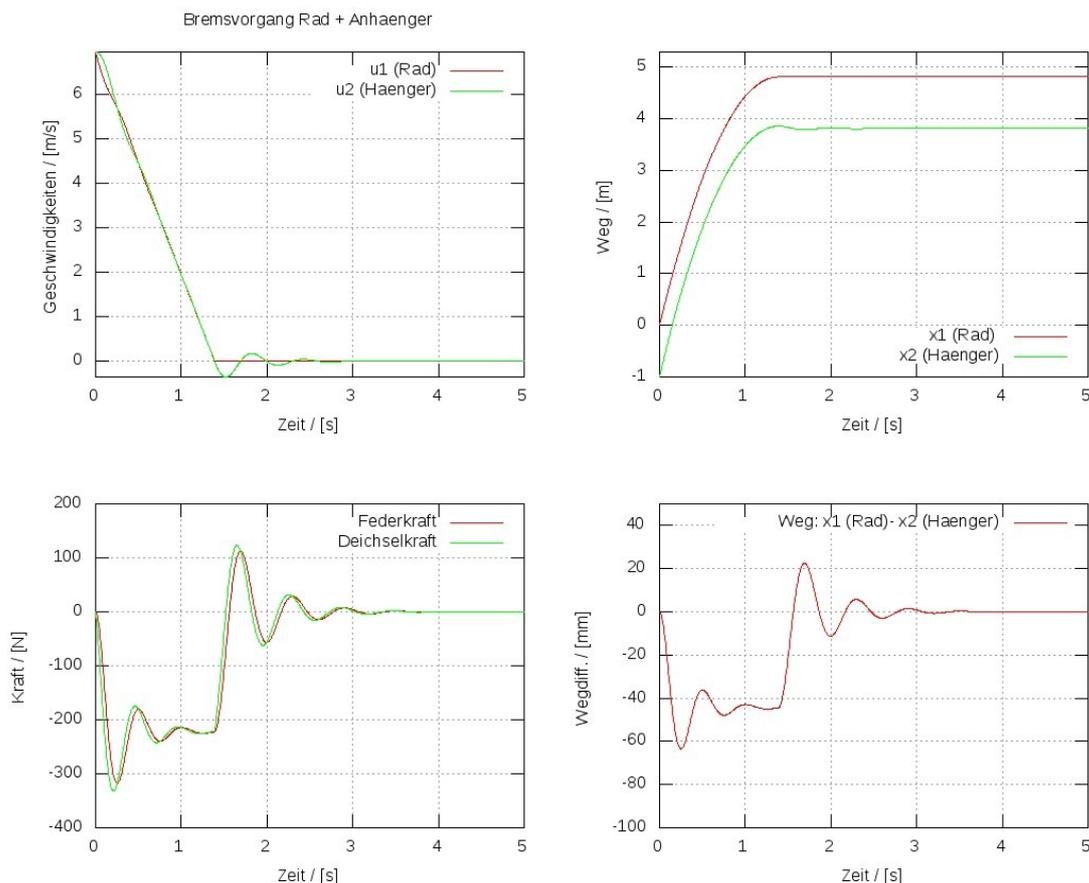


**Abb. 8-1:** Geschwindigkeits- Weg- und Deichselkraftverlauf sowie Relativbewegung Rad-Hänger bei  $c=5000$  N/m und  $d=100$  Ns/m

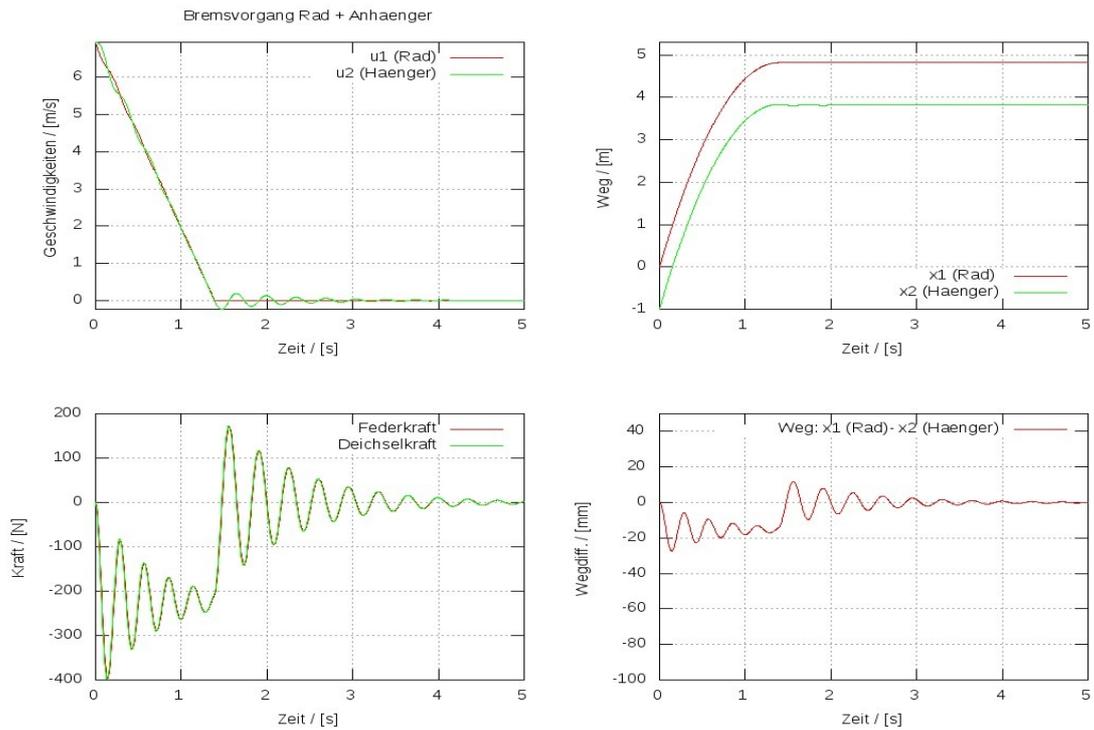
Die Verläufe von Weg und Geschwindigkeiten in Abb. 8 sind insgesamt plausibel. Die Abbremsung dauert etwa 1.5 s. Der Bremsweg beträgt etwa 4 m. Man erkennt in den Kraftschwingungen sowie in den Teilbildern der Relativbewegung (Bilder rechts unten in Abb. 8-1 bis 8-4) auch deutlich ein Nachschwingen des Hängers, nachdem das Rad bereits zum Stillstand gekommen ist. Das konnte bei den Testfahrten ebenfalls beobachtet werden.

Das kritische Überschwingen ist bei starker Dämpfung geringer als bei schwacher Dämpfung. Es wird dort aber immer noch eine etwa 50 %ige Kraftüberhöhung gegenüber der statischen Bremskraft beobachtet, während die Überhöhung bei der schwächeren Dämpfung von 100 Ns/m an die 80 % beträgt. Die entsprechende große Wegdifferenz von etwa -70 mm dürfte aber zu groß sein, weil die Kupplungsfeder dadurch extrem verbogen werden müsste. In der Realität sollte das durch die beobachtete progressive Federwirkung verhindert werden. Darauf weisen auch die in Abb. 8-3 und 8-4 gezeigten Ergebnisse mit der erhöhten Gesamtsteifigkeit  $c=14500$  N/m hin, die eine deutlich geringere Amplitude der Ortskoordinatendifferenz von etwa 25 mm zeigen.

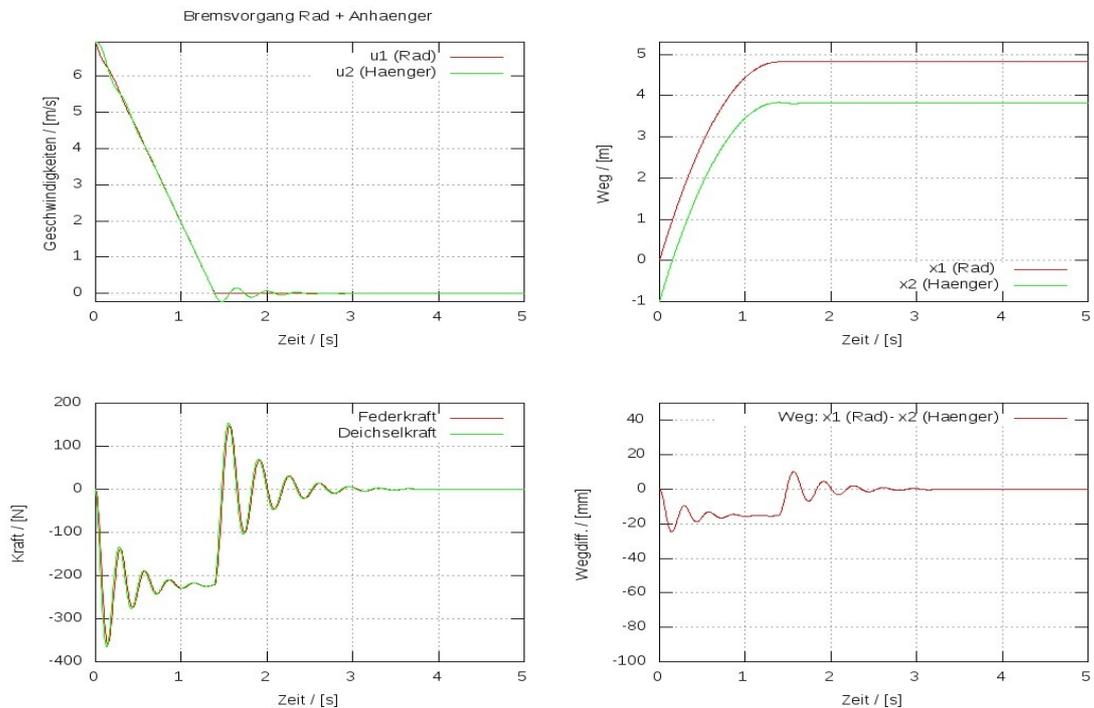
Aus den Bildern 8-1 bis 8-4 erkennt man auch, dass die Deichselkraft im wesentlichen aus der Federkraft besteht, da die Dämpfungskraft offensichtlich deutlich kleiner ist, weshalb sich Federkraft und Gesamtkraft kaum voneinander unterscheiden.



**Abb. 8-2:** Geschwindigkeits- Weg- und Deichselkraftverlauf sowie Relativbewegung Rad-Hänger bei  $c=5000$  N/m und  $d=200$  Ns/m (starke Dämpfung).



**Abb. 8-3:** Geschwindigkeits- Weg- und Deichselkraftverlauf und Relativbewegung Rad-Hänger bei  $c=14500$  N/m und  $d=100$  Ns/m.



**Abb. 8-4:** Geschwindigkeits- Weg- und Deichselkraftverlauf sowie Relativbewegung Rad-Hänger bei  $c=14500$  N/m und  $d=200$  Ns/m (starke Dämpfung).

## 5 Testergebnisse

### 5.1 Vortests

Zunächst wurde eine Reihe von 8 aufeinander folgenden Testfahrten gemacht, die in einem gemeinsamen Datensatz abgespeichert wurden. Diese Vortests dienen der Prüfung der prinzipiellen Funktion des Messaufbaus und insbesondere der Klärung der Frage, in welcher Größenordnung die Bremskräfte in der Deichsel liegen. Daher wurde nur das Kraftsignal ausgewertet, das in Abb. 9 gezeigt ist. Der dargestellte Messzeitraum umfasst 300 s, worin 8 Vollbremsungen an den Kraftpeaks zu erkennen sind. Die Peaks umfassen jeweils etwa 2 Sekunden Bremszeit, die mit zahlreichen Messpunkten aufgelöst wurden, was hier im Gesamtbild wegen des großen Gesamtzeitintervalls jedoch nicht zu erkennen ist.

Die Hauptaussage dieser Abbildung ist, dass in der Deichsel beim Bremsen maximale Normalkräfte bis zu einer Höhe von etwa 210 N auftreten. Da die Bremskraft in Fahrtrichtung wirkt, die Deichsel jedoch unter 45 Grad angelenkt ist, kann man die Bremskraft in eine Normal-Komponente in Deichselrohrrichtung (Wägezelle) und in eine Querkraft zerlegen, die ein Biegemoment für die Deichsel bewirkt. Daraus ergibt sich eine maximale Gesamtbremskraft von etwa 300 N, was im Bereich der oben genannten Rechenergebnisse in etwa bei den Fällen mit stärkerer Dämpfung liegt.

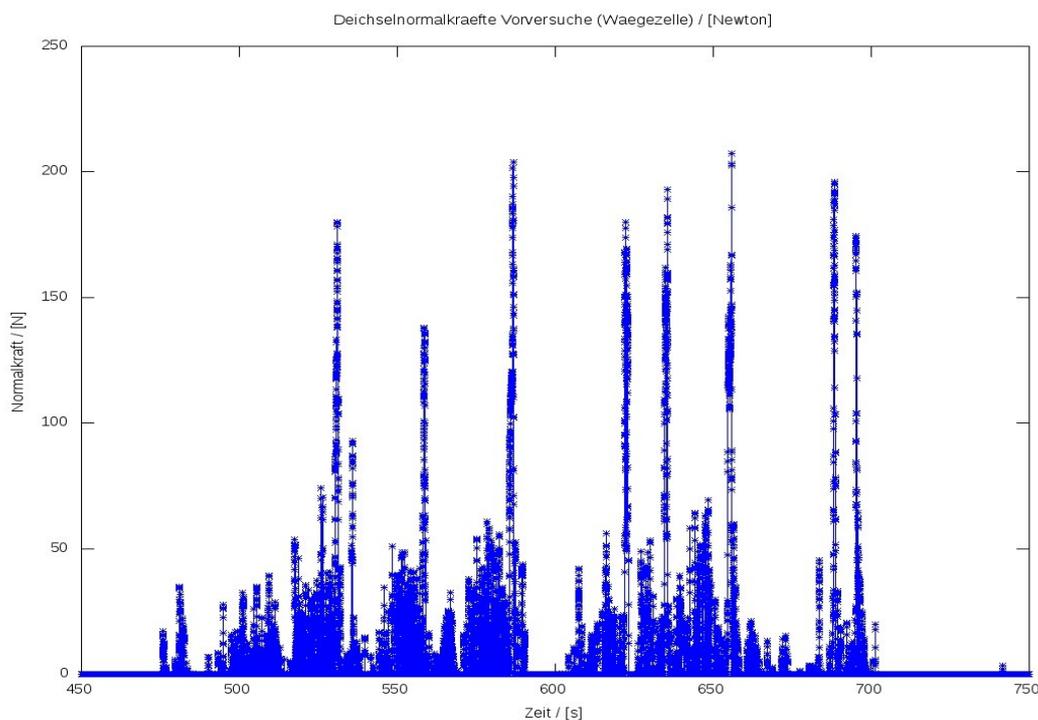


Abb. 9: Kraftsignale der ersten Testreihe (Vorversuche) mit 8 Bremsungen

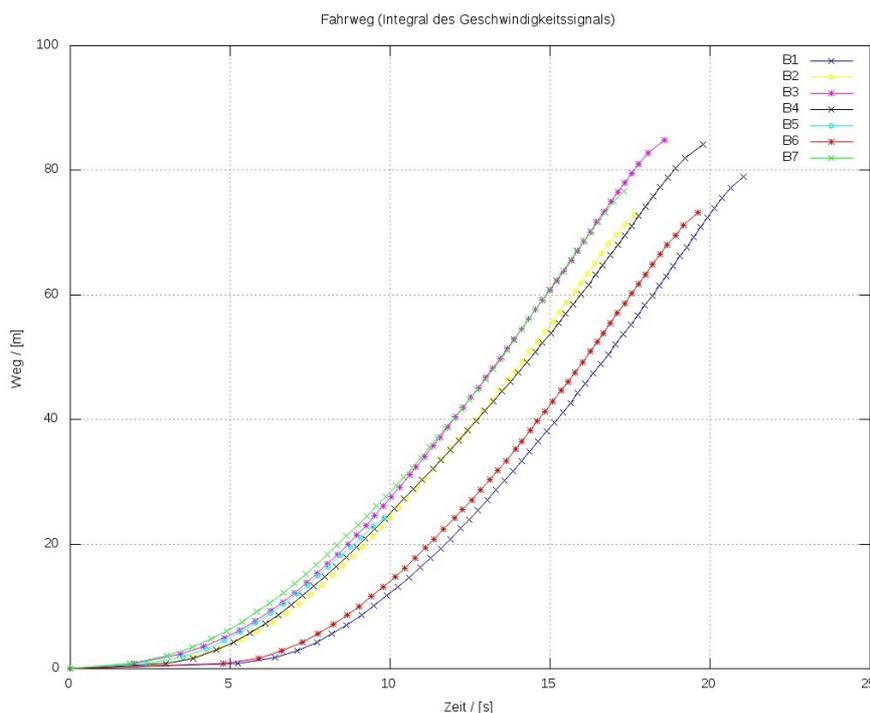
Neben den hohen Peaks der Bremssignale sieht man in Abb. 9 noch zahlreiche niedrigere Kraftspitzen, die von den dem Fahrbetrieb dauernd überlagerten Deichselschwingungen herrühren. Die finden sich besser aufgelöst auch in den weiter unten diskutierten Ergebnissen der nächsten Versuchsreihe.

## 5.2 Zweite Testreihe mit detaillierter Auswertung

In der zweiten Versuchsreihe wurden dann 6 weitere Vollbremsungen und eine schwächere Bremsung unter ansonsten gleichen Bedingungen wie bei den Vortests durchgeführt. Das Rad-Hänger-Gespann wurde dabei jeweils über eine Strecke von etwa 80 m auf etwa 25 m/s beschleunigt und danach durch eine starke Bremsung zum Stehen gebracht. Dabei wurde versucht, möglichst ein seitliches Ausbrechen des Hängers zu vermeiden.

Abb. 10 bis 14 zeigen die Versuchsergebnisse jeweils für den Fahrweg, die Fahrgeschwindigkeit und die Beschleunigung sowie für die Kraftsignale insgesamt und während der Bremsphase. Die Wegsignale wurden dabei durch Integration der Geschwindigkeit aus den Hallgeber-Signalen und die Beschleunigungskurven durch Differentiation der Hallgeber-Signale gewonnen. Die Geschwindigkeit ergab sich aus dem Quotienten des Radumfangs durch die Zeitdifferenz zwischen zwei Anstiegsflanken des rechteckförmigen Hall-Signals, das durch zwei gegenüberliegende Magnete mittels eines bipolaren Sensors abgenommen wurde. Eine feinere Auflösung könnte durch Verwendung weiterer am Umfang gleichverteilter Magnete erreicht werden.

In Abb. 10 sieht man die zurückgelegten Fahrstrecken für die Versuche B1 bis B7. Man erkennt jeweils die Beschleunigungsphase, einen kurzen Bereich mit der etwa konstanten Höchstgeschwindigkeit und dann die Abbremsphase mit abnehmender Steigung. Die Fahrstrecke wurde einmal auch mit dem Bandmaß überprüft, um einen groben Fehler bei der Geschwindigkeitsermittlung auszuschließen, was gute Übereinstimmung ergab.



**Abb. 10:** Fahrwege der zweiten Versuchsreihe (Tests B1 bis B7)

Abb. 11 zeigt die Geschwindigkeitsverläufe für die zweite Versuchsreihe. Man erkennt, dass jeweils etwa 7 bis 7.5 m/s entsprechend 25 bis 27 km/h als Höchstgeschwindigkeit erreicht werden, bevor dann die Bremsung einsetzt. Die Geschwindigkeitswerte fallen danach stark ab, gehen jedoch nicht ganz auf Null zurück, was von der doch recht groben Diskretisierungs-Schrittweite des

Hallgebers von einem ganzen Radumfang herrührt (Auswertung über Distanz zweier abfallender Flanken der pulsformigen Hall-Signale).

Abb. 12 zeigt die aus den Hall-Signalen ermittelten Beschleunigungen. Die dargestellten Kurven wurden aus den Roh-Signalen durch einen einfachen Glättungsalgorithmus (5-Punkt-Mittelwertverfahren) gewonnen, um die bei numerischer Differentiation auftretenden Fluktuationen zu reduzieren. Hier erkennt man zunächst die Beschleunigungsphase mit positiven Werten zwischen  $0.5$  und  $1 \text{ m/s}^2$  und dann die Abbremsphase, wo negative Beschleunigungen zwischen  $-4.5$  und  $-5.5 \text{ m/s}^2$  erreicht werden. Das entspricht den typischerweise bei einer guten Fahrradbremse zu erwartenden Werten von über  $4 \text{ m/s}^2$ .

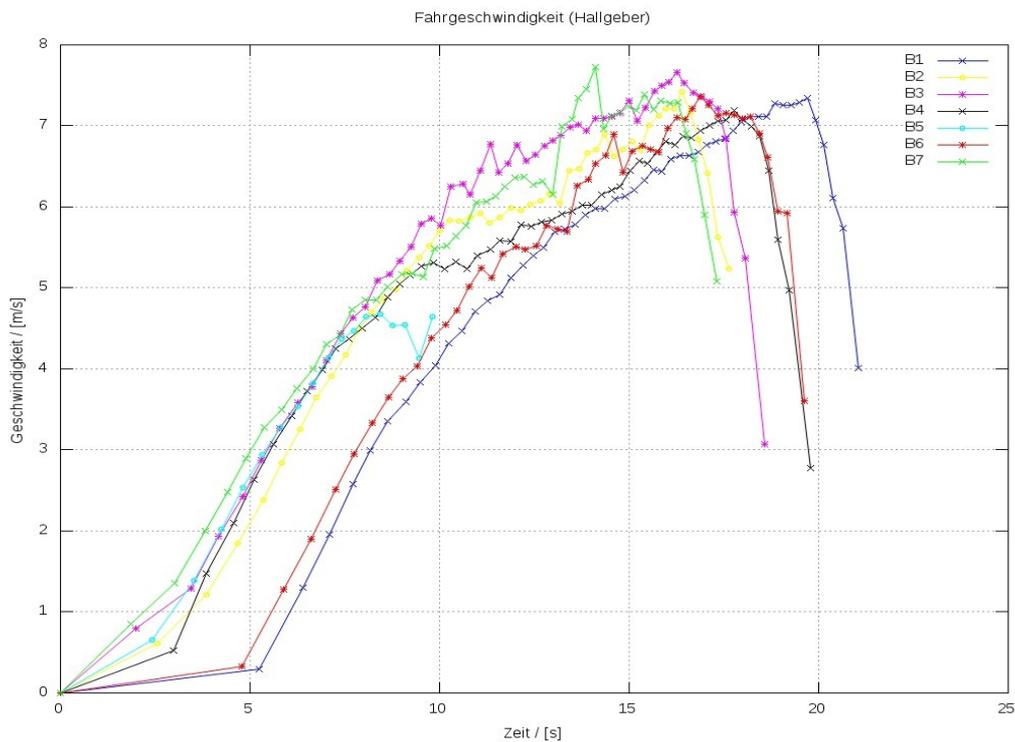


Abb. 11: Geschwindigkeitsverläufe der Bremsversuche B1 bis B7

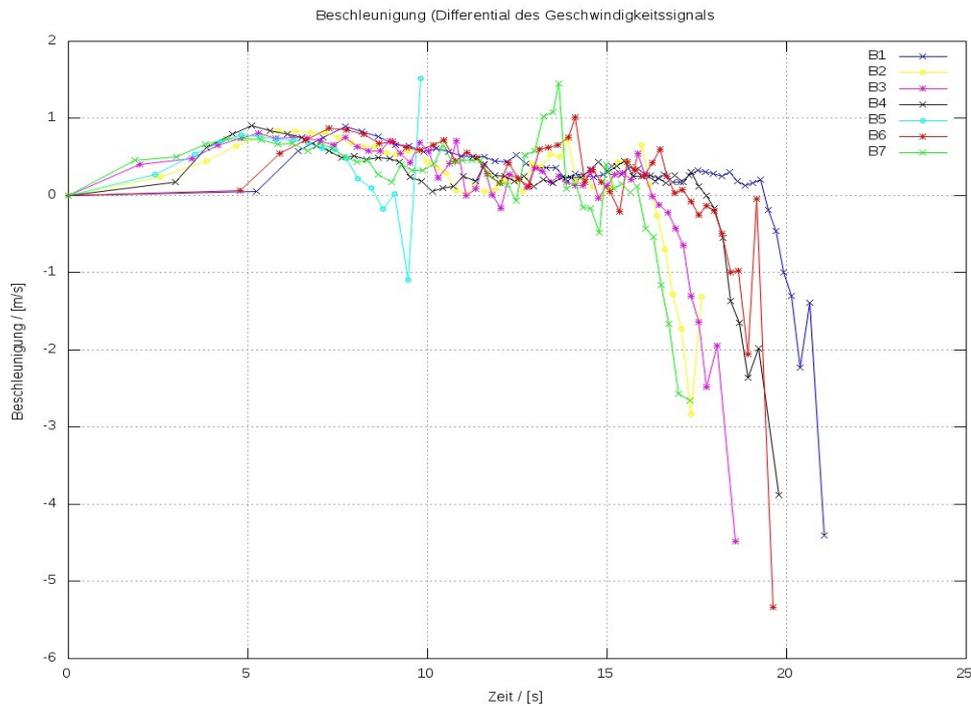


Abb. 12: Verlauf der Beschleunigung bei den Testfahrten B1 bis B7

Abb. 13 zeigt die Kraftsignale aller 7 Versuche über die gesamte Versuchsdauer. Man kann deutlich die Deichselschwingungen mit niedriger Amplitude von den viel stärkeren Signalen aus der Abbremsphase unterscheiden. Da der Messverstärker nur Druckkräfte verarbeiten konnte, sind nur die Drucksignale sichtbar. Der besseren Auflösung wegen ist die vor allem interessierende Abbremsphase zwischen 15 und 22.5 s in Abb. 14 noch einmal separat und vergrößert dargestellt. Die Abbremsphase dauert jeweils zwischen 1.5 und 2 s und man erkennt in Abb. 14 auch in den Kraftsignalen überlagerte Schwingungen, die den permanent vorhandenen Deichselschwingungen zugeordnet werden können und die das Kraftsignal gegenüber dem Wert der einfachen Handabschätzung überhöhen, wie es auch vom Zweikörper-Rechenmodell prognostiziert wird.

Weiter sieht man in Abb. 14 z.B. im Fall des Tests B4 (schwarze Kurve) deutlich das Nachschwingen des Hängers nach Ende der Bremsung an den drei danach noch auftretenden Peaks mit abnehmender Amplitude (rechts im Bild), woraus die Dämpfungskonstante berechnet werden kann.

Vor der weiteren Diskussion der Kraftverläufe muss man nun wissen, dass die Deichsel bei Versuch B7 nach insgesamt nur 14 starken Bremsungen partiell gebrochen ist bzw. durch Einknicken in der ersten Biegung unter massiver plastischer Verformung katastrophal versagt hat. Der Beginn der Plastifizierung hat vermutlich bereits nach Test B3 eingesetzt, da in den Tests B4 und B6 (Niederlastfall B5 ist nicht relevant und ist nur in Abb. 13 sichtbar) trotz hoher negativer Beschleunigungen (Höchstwert bei Test B6) bereits nur noch vergleichsweise niedrige Deichselkräfte erreicht werden. Im Test B7, wo die Deichsel endgültig versagt hat, ist dann überhaupt kein nennenswerter Deichselkraftanstieg beim Bremsen erkennbar. Das weist darauf hin, dass die Deichsel zu diesem Zeitpunkt bereits vorgeschädigt, d.h. eventuell durch plastische Verformung etwas über den Originalkrümmungswinkel gestaucht war, was jedoch nicht unmittelbar auffällig war. Allerdings wurden auch keine Sichtprüfungen zwischen den Tests durchgeführt, da ein derart frühes Versagen nicht erwartet wurde.

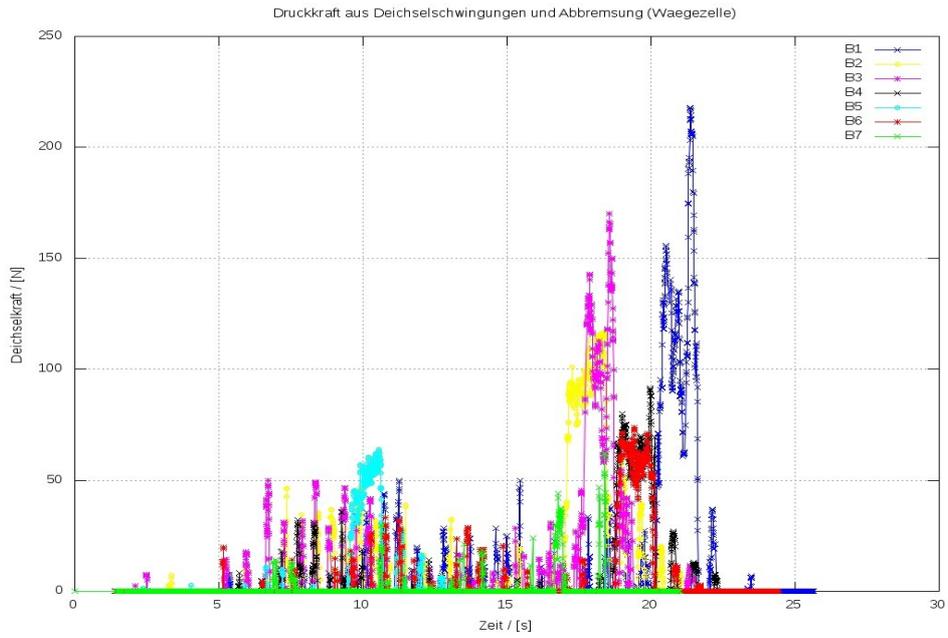


Abb. 13: Kraftsignale über die gesamte Fahrzeit für die Versuche B1 bis B7

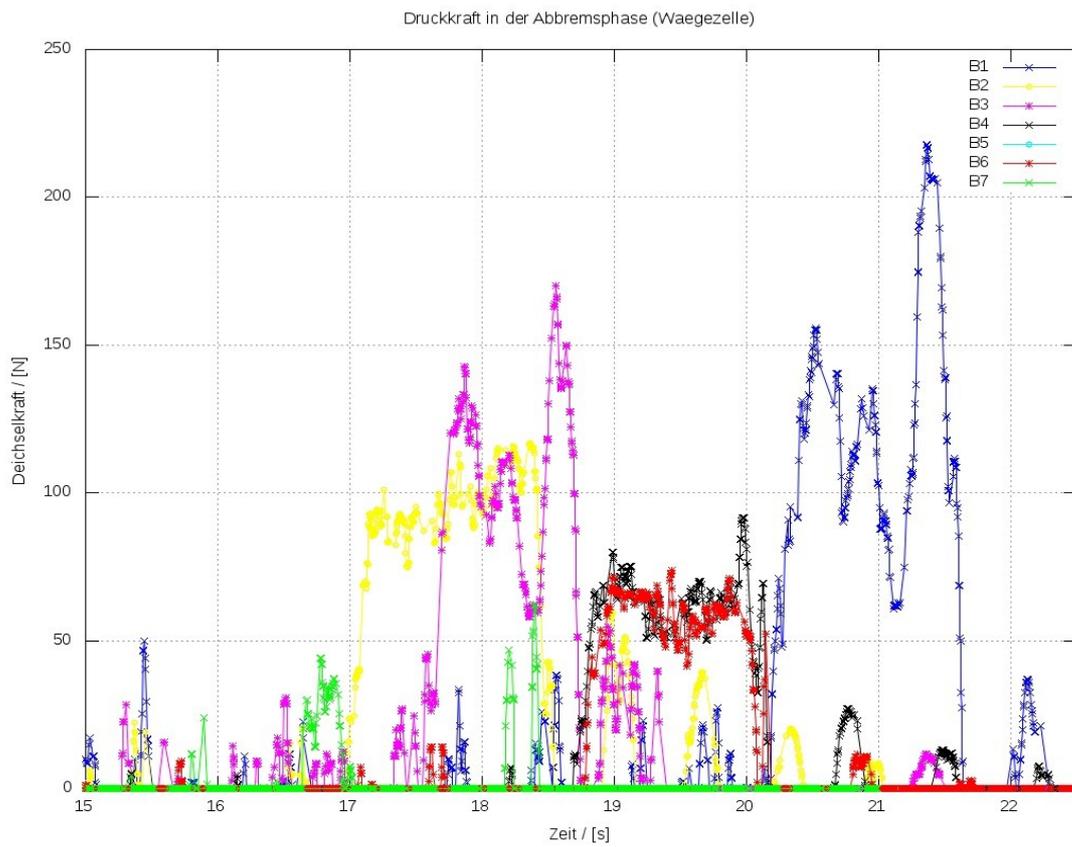


Abb. 14: Kraftsignale der Versuche B1 bis B7 für die Bremsphase (Test B5 nicht enthalten)

## 6 Erklärungsversuch für das Deichselversagen

### 6.1 Phänomenologie

Die Abb. 15 bis 16 zeigen die Deichselverformung nach dem Versagen sowie Details der Bruchstelle. Nach den im folgenden gezeigten Spannungsanalysen dürfte der Bruch durch Plastifizierung auf der inneren Druckseite der ersten Deichselkrümmung eingeleitet worden sein. Das dürfte dann zum Einknicken in der Ebene der Deichselschenkel mit seitlicher Ausbeulung und Einrissen an den dort unter 90 Grad entstandenen starken Knicken geführt haben. Weiter findet sich dann noch ein Einriss an der ebenfalls stark gefalteten Innenseite (Druckseite) der ersten Biegung.



Abb. 15: Geknickte Deichsel

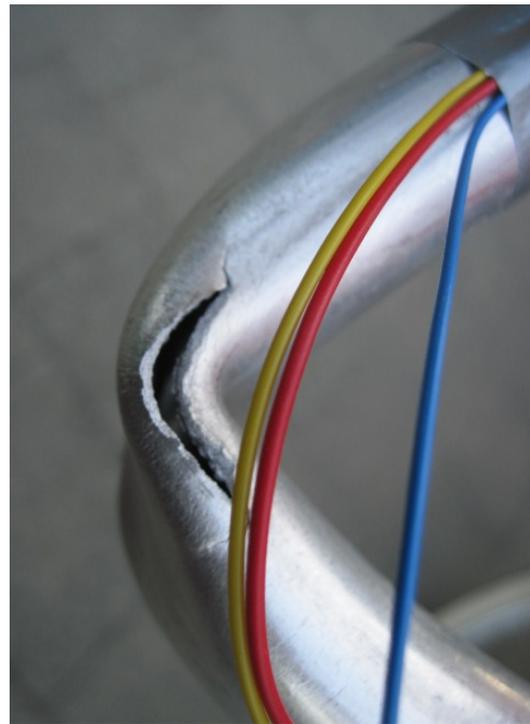


Abb. 16: Seitliche Einrisse

### 6.2 Begleitende Berechnungen

#### 6.2.1 1D-Rechnung

Zur Erklärung des Versagens wurde näherungsweise die Verteilung von Querkraft, Normalkraft und Biegemoment entlang der Deichsel unter Verwendung der aus den Versuchsergebnissen erhaltenen Belastungsdaten bestimmt. Dazu wurden die Differentialgleichungen für Querkraft, Normalkraft und Biegemoment entlang der gekrümmten Deichsel integriert (s. J. u. H. Dankert, Technische Mechanik, 4. Auflage, Teuber-Verlag, S. 304 ff) .

$$\frac{dF_N}{ds} = \frac{-F_Q(s)}{R} \quad (12)$$

$$\frac{dF_Q}{ds} = \frac{F_N(s)}{R} \quad (13)$$

$$\frac{dM_B}{ds} = F_Q(s) \quad (14)$$

wobei  $s$  die Ortskoordinate entlang der Deichsel und  $R$  den Krümmungsradius in den beiden Biegungen bedeutet. Abb. 15 zeigt eine Skizze der Deichsel, in der die Bezeichnungen für die charakteristischen Abmessungen und Winkel angegeben sind. Der Krümmungsradius an den beiden Biegungen beträgt jeweils  $R=0.04$  m, die geraden Rohrstücke dazwischen haben die Längen  $S_1=0.47$  m,  $S_2=0.33$  m und  $S_3=0.2$  m.

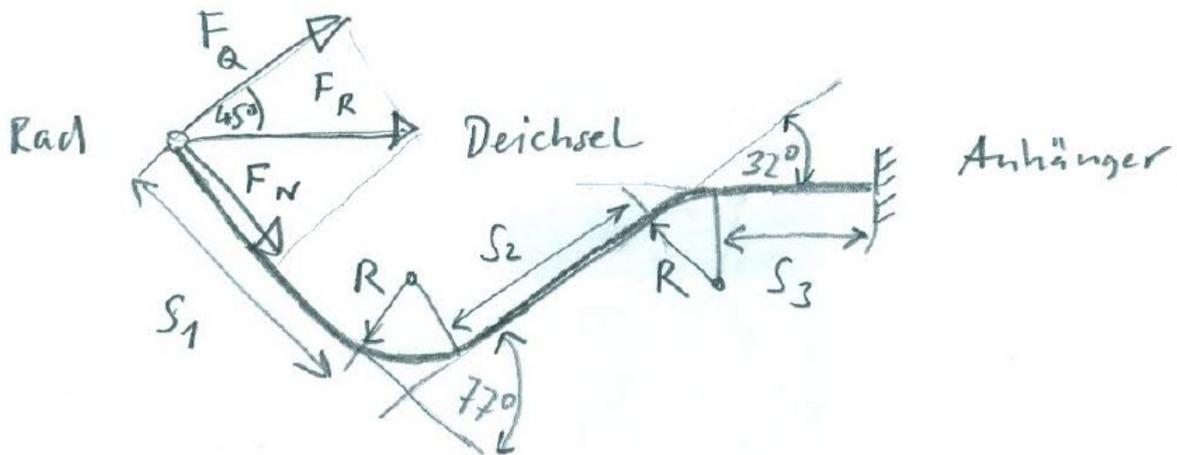


Abb. 17: Skizze zur Deichselgeometrie

Aus der Momentenverteilung ergibt sich das größte Biegemoment für den Bremslastfall im Bereich der 1. Biegung (kritischer Querschnitt). Dafür wurde die Spannungsverteilung unter Berücksichtigung der Deichselkrümmung näherungsweise nach Dankert berechnet

$$\sigma(y) = \frac{F_N}{A} + \frac{M_B}{R \cdot A} \left(1 + \frac{1}{\kappa} \frac{y}{R+y}\right) \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{-1}{A} \int_A \frac{y}{R+y} dA, \quad (15)$$

was für  $R \rightarrow \infty$  gegen die bekannte Beziehung für den geraden Träger geht (s. Dankert, a.a.O., S. 309). Das darin auftretende Formfaktorintegral  $\kappa$  wurde für den vorliegenden Rohrquerschnitt in 3 Teile zerlegt und dann numerisch integriert.  $A$  bezeichnet in Gl.(15) den Rohrquerschnitt und  $dA$  ein Querschnittsflächenelement. Mit  $y$  ist die lokale Koordinatenachse von der Rohrmitte zum Außenradius bezeichnet. Das verwendete Deichselrohr aus AlMgSi05 hat einen Außendurchmesser von 25 mm und eine Wandstärke von 2 mm. Details zur Berechnung finden sich im Anhang II. Der Matlab/Octave – Code zur Berechnung ist in Anhang III angegeben.

In den Rechnungen wurde die veränderte Deichselgeometrie (Verlängerung um die Länge der Wägezelle plus Aufnehmer) sowie die maximal in den Versuchen aufgetretenen Normalkraft von 220 N verwendet. Weiter wurde von einem idealen kreisringförmigen Querschnitt ausgegangen.

Abb. 18 zeigt die Verläufe von Normalkraft, Querkraft und Biegemoment entlang der Deichsel für diesen Lastfall. Man erkennt deutlich die Variationen der Normalkraft in den gekrümmten Regionen und den Vorzeichenwechsel der Querkraft. Außerdem lässt sich ein maximale Biegemoment von etwa 110 Nm im Bereich der 1. Biegung ablesen.

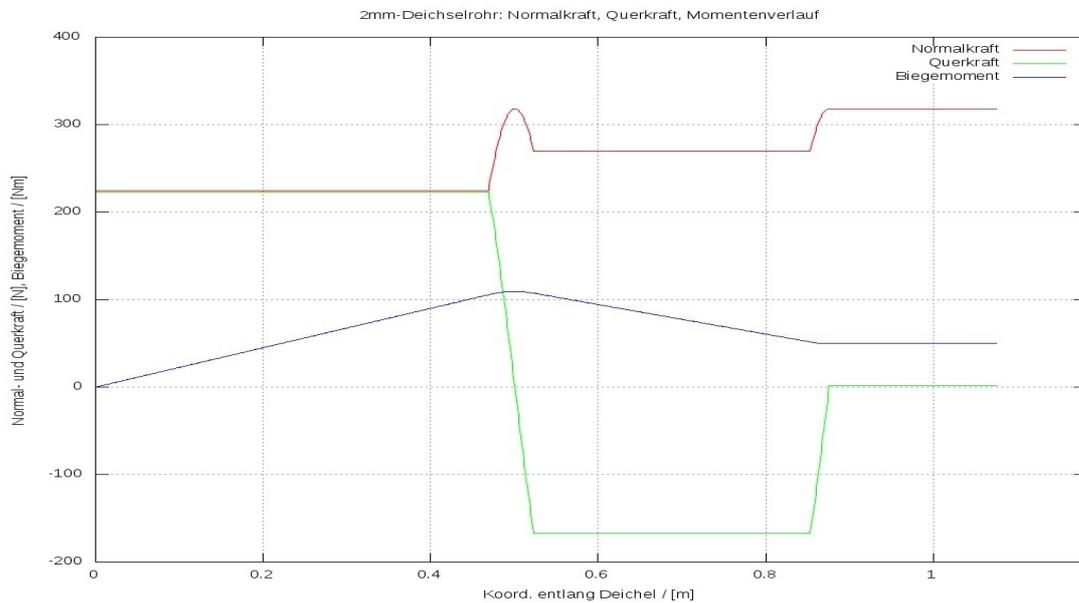


Abb. 18: Normalkraft, Querkraft und Biegemoment entlang der Deichsel für Test B1

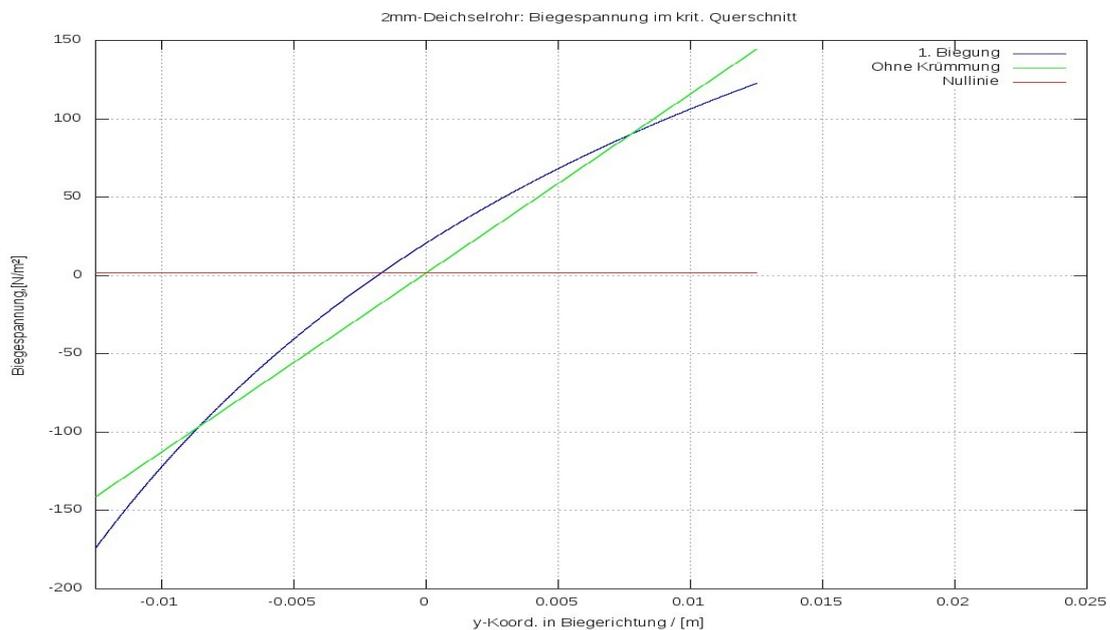


Abb. 19: Spannungsverlauf über der Radialkoordinate im kritischen Querschnitt

In Abb. 19 ist der Spannungsverlauf im kritischen Querschnitt in der Knickebene gezeigt. Man erkennt deutlich die Spannungsüberhöhung auf der Druckseite bei Berücksichtigung der Krümmung (blaue Kurve) gegenüber der linearen Standardspannungsverteilung (grüne Kurve) beim glatten

Rohr. Der Normalspannungsanteil ist mit etwa  $2 \text{ N/mm}^2$  sehr gering, weshalb in erster Linie die Biegebelastung kritisch ist. Als maximale Biegespannung in der Druckzone wird ein Wert von etwa  $175 \text{ N/mm}^2$  erreicht, der bereits über der Streckgrenze für AlMGSi05 (EN-AW-6060) von  $150$  bis  $160 \text{ N/mm}^2$  liegt. Damit gibt auch die 1D-Rechnung Hinweise auf beginnende Plastifizierung.

### 6.2.2 FEM-Berechnungen

Zur weiteren Absicherung der Ergebnisse wurden noch Rechnungen mit dem freien FEA-Programm Z88 Aurora der Universität Bayreuth durchgeführt (s. F. Rieg et. al., Finite Elemente Analyse für Ingenieure, 4. Auflage, Hanser Verlag 2012). Dazu wurde eine STL-Datei für die Deichsel mit den oben angegebenen Abmessungen und Biegewinkeln erstellt. Allerdings wurde die Länge  $S_1$  (von der Kupplung bis zur ersten Biegung) von  $0.47 \text{ m}$  auf  $0.37 \text{ m}$  verkürzt, was eher der tatsächlichen Deichsellänge ohne den zusätzlich eingebauten Kraftaufnehmer entspricht.

Aus der STL-Datei wurde mit dem Netzgenerator TETGEN ein Rechennetz mit etwa  $30000$  Knoten und etwa  $100000$  Elementen erzeugt. Für die Berechnungen wurde die Deichsel am hängerseitigen Ende als fest eingespannt betrachtet (keine Verschiebungen), während am radseitigen Ende der Deichsel die Bremskraft zerlegt in Normal- und Querkraft entsprechend der  $45$ -Grad-Anlenkung aufgebracht wurde. Es wurden  $3$  Lastfälle mit Normal- und Querkraften von  $155 \text{ N}$ ,  $210 \text{ N}$  und  $250 \text{ N}$  berechnet, wie sie auch in den Messungen in etwa aufgetreten sind. Zur Lösung wurde der in Z88 eingebaute Konjugierte-Gradienten-Solver mit Vorkonditionierung SICCG verwendet.

Die Ergebnisse sind in Abb. 20 dargestellt. Die dargestellten Elementspannungen werden in Z88 Aurora mittels der Gestaltänderungshypothese aus den benachbarten Knotenspannungen ermittelt.

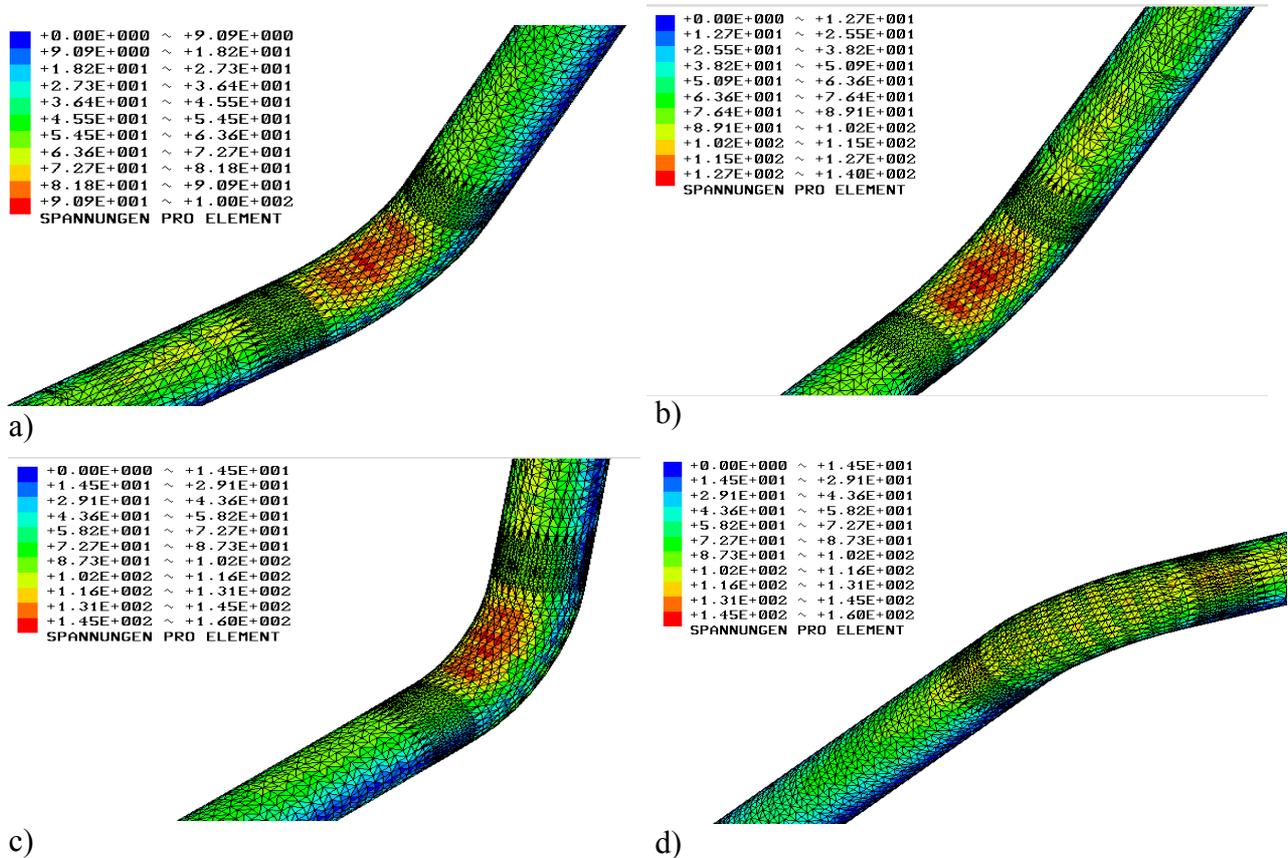
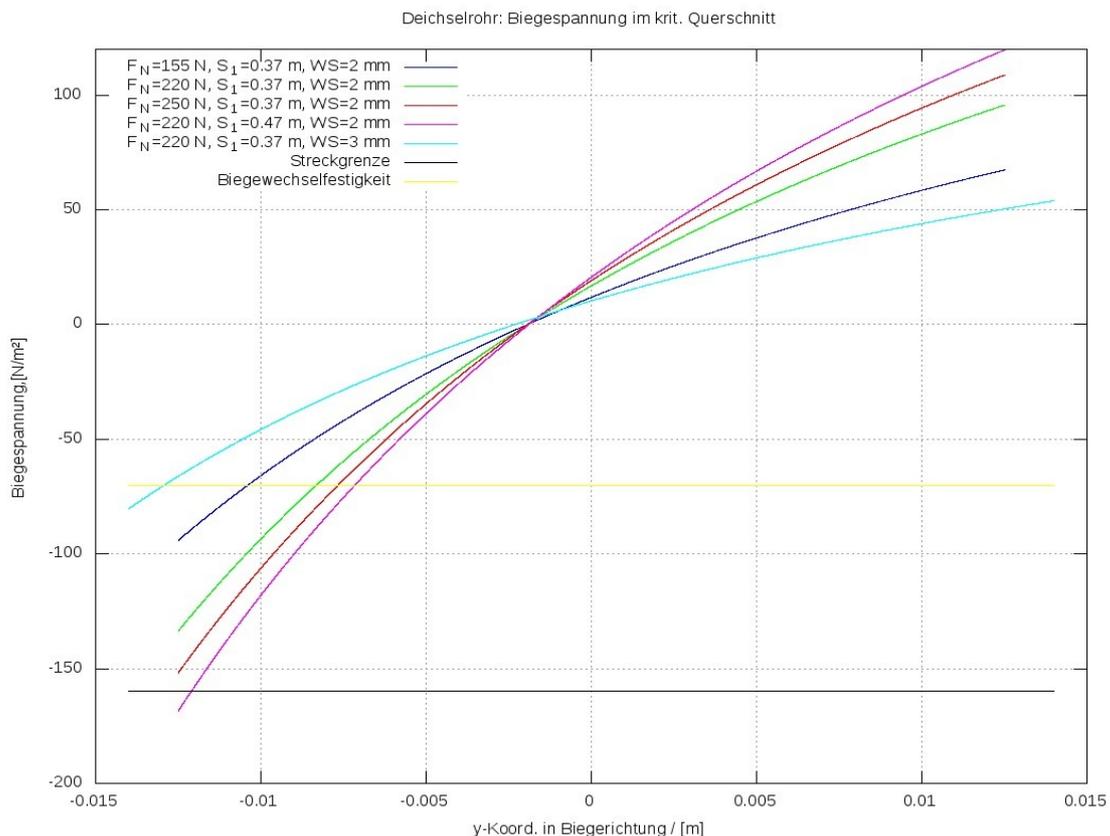


Abb 20: Spannungsverteilung 1. Biegung in  $\text{N/mm}^2$  a)  $F_N = 155 \text{ N}$  Druckseite, b)  $F_N = 220 \text{ N}$  Druckseite c)  $F_N = 250 \text{ N}$  Druckseite, d)  $F_N = 250 \text{ N}$  Zugseite

Man sieht aus den Abb. 20 a) bis d), dass die maximalen Spannungen in Übereinstimmung mit der Theorie des gekrümmten Trägers auf der Druckseite entstehen und mit zunehmender Normalspannung im Fall von  $F_N=250$  N die Streckgrenze von AlMgSi05, die bei etwa  $160$  N/mm<sup>2</sup> liegt, erreicht wird. Wegen der Verkürzung der Deichsel ist dies hier im Vergleich zu Abb. 19 erst bei einer etwas höheren Normalkraft von  $250$  N der Fall. Zum Vergleich wurde deshalb auch mit dem 1D-Modell nochmals die Spannungsverteilung im kritischen Querschnitt für die 3 Lastfälle mit der um  $10$  cm kürzeren Deichsel berechnet, was in Abb. 21 dargestellt ist. Man erkennt daraus, dass die quantitative Übereinstimmung der maximalen Druckspannungen für FEM und 1D-Modell recht gut ist (z.B. ca.  $160$  N/mm<sup>2</sup> in der FEM-Rechnung von Abb. 20 c) und  $150$  N/mm<sup>2</sup> in der korrespondierenden rot markierten Kurve in Abb. 21.

Aus den Verformungen der Deichsel in Belastungsrichtung, die sich aus der FEM-Rechnung ergaben, und der Bremskraft wurde zum Vergleich die Deichselsteifigkeit nochmals abgeschätzt. Dabei ergaben sich aus allen drei FEM-Rechnungen Werte um die  $30000$  N/m. Das liegt zumindest in der Größenordnung der in Kapitel 4 genannten Messwerte (ca.  $53000$  N/m). Unterschiede dürften auf die verschiedene Art der Einspannung (im Versuch an beiden Enden fixiert) zurückzuführen sein, was die Deichsel steifer macht. Dadurch wird nochmals bestätigt, dass die Deichselsteifigkeit bezüglich Gesamtfederkonstante des zur Kraftabschätzung verwendeten Zweikörpermodells vernachlässigt werden kann, .



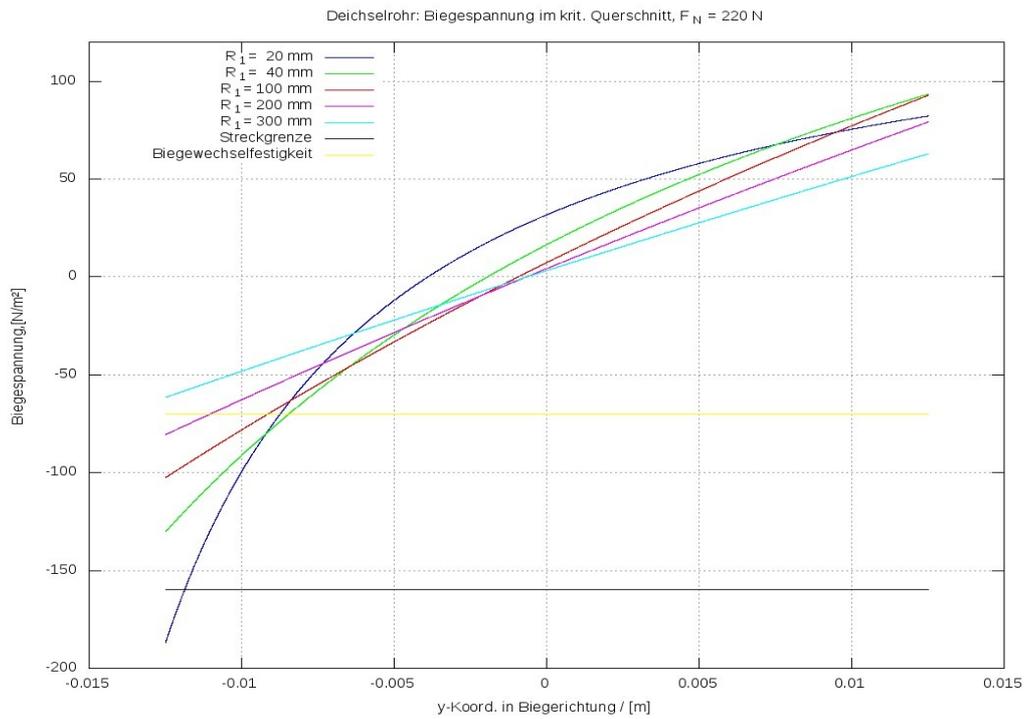
**Abb. 21:** Spannungsverlauf im kritischen Querschnitt für die um  $10$  cm verkürzte Deichsel bei verschiedenen Normalkräften (blaue, grüne und rote Kurve), für die um  $10$  cm längere Testdeichsel mit Messaufnehmer (magenta) sowie bei auf  $3$  mm erhöhter Wandstärke und Aussendurchmesser  $28$  mm (cyan).

Weiter sind zum Vergleich noch der Fall der um den Messaufnehmer verlängerten Deichsel sowie eine Vergleichsrechnung mit auf 3 mm erhöhter Wandstärke eingetragen. Man erkennt, dass die Fälle mit 2 mm Wandstärke bei Normalkräften über 200 N sehr nahe an oder schon über der Streckgrenze von 160 N/mm<sup>2</sup> liegen, während nur der Fall mit erhöhter Wandstärke eine akzeptable Sicherheit liefert. Die für dynamische Belastung maßgebliche Biege-wechselfestigkeit von 70 N/mm<sup>2</sup> wird in allen Fällen überschritten.

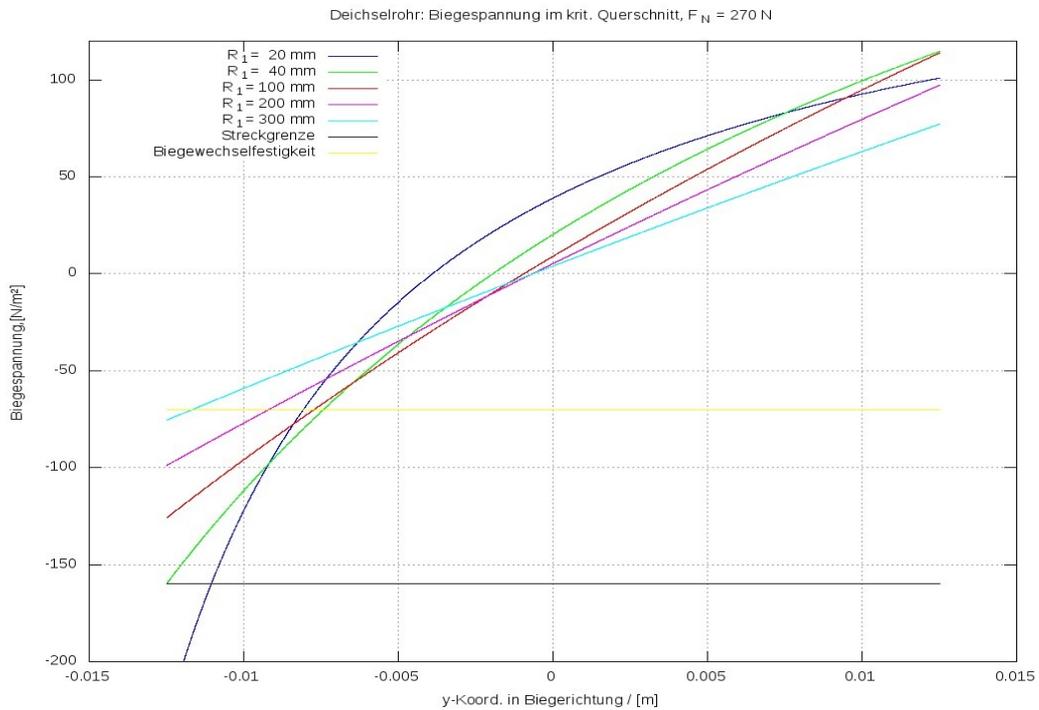
Da eine wichtige Ursache für das Überschreiten der Streckgrenze die Spannungsüberhöhung durch die Vorkrümmung der Deichsel sein dürfte, wurde der Effekt des Krümmungsradius auf die Spannungsverteilung im kritischen Querschnitt genauer betrachtet. Dazu wurden Rechnungen bei fixem Winkel von 77 Grad in der ersten Biegung aber mit variiertem Krümmungsradius betrachtet. Dabei zeigte sich, dass eine Erhöhung des Krümmungsradius in zweierlei Weise günstig ist: Zum einen wird die Spannungsüberhöhung auf der Druckseite reduziert, zum andern wird auch noch der maximale Hebelarm der Bremskraft reduziert, da der Krümmungsscheitel nach innen hin zur Fahrzeuglängsachse rückt.

Abb. 22 zeigt die Spannungsverteilung bei einer Querkraft von etwa 220 N, die dem Testlastfall entspricht, für von 20 mm auf 300 mm anwachsende Krümmungsradien. Bei den zuvor gezeigten Ergebnissen war der Krümmungsradius mit etwa 40 mm ungefähr gleich dem Wert der Testdeichsel gewählt worden (Referenzfall). Die Länge des ersten Deichselstückes  $S_1$  beträgt im Referenzfall wiederum 0.37 m, hat also den um die Messaufnehmerlänge von 0.1 m reduzierten Wert. Für die modifizierten Krümmungsradien wurden die geraden Deichsellängenteile entsprechend abgeändert, so dass jeweils Anfangs- und Endpunkt sowie die sich aus den Tangenten ergebenden „Knickpunkte“ erhalten blieben.

Man erkennt in Abb. 22 erwartungsgemäß, dass ein gegenüber dem Referenzwert von 0.04m reduzierter Krümmungsradius weitere Spannungserhöhung bewirkt, während mit zunehmenden Radien sowohl die Spannungsüberhöhung als auch die Maximalspannung stark abnehmen. Abb. 23 zeigt dieselben Rechnungen für Beladung des Hängers mit der Nenn-Nutzlast, was auf ein Gesamtgewicht von 54 kg oder eine entsprechend hochkalierte Brems-Normalkraft von 270 N führt. In diesem Fall liefern die beiden geringsten Krümmungsradien 20 mm und 40 mm bereits Maximalspannungen über der Streckgrenze. Daraus kann man schließen, dass sich auch erhöhte Krümmungsradien als geeignete konstruktive Maßnahmen zur Verbesserung der Sicherheit anbieten. Allerdings sind der Erhöhung des Krümmungsradius durch die Manövrierfähigkeit des Gespanns Grenzen gesetzt (Anstoßen des Hinterrades an der Deichsel beim Rangieren).



**Abb. 22:** Spannungsverlauf im kritischen Querschnitt für die um 10 cm verkürzte Deichsel bei verschiedenen Krümmungsradien in der ersten Biegung bei 220 N Normalkraft (75% Beladung)



**Abb. 22:** Spannungsverlauf im kritischen Querschnitt für die um 10 cm verkürzte Deichsel bei verschiedenen Krümmungsradien in der ersten Biegung bei 270 N Normalkraft (Vollast)

### 6.3 Versagensmechanismus

Als Hauptergebnis dieser Berechnungen ergibt sich, dass das maximale Biegemoment beim Bremsen an der Stelle der ersten Deichselbiegung auftritt. Dieses Moment verursacht den Hauptanteil der aus Normal- und Biegespannung zusammengesetzten Gesamtspannung im kritischen Querschnitt. Durch die Krümmung wird die Biegespannung auf der Druckseite gegenüber den Verhältnissen beim geraden Rohr erhöht und auf der Zugseite reduziert. Zusammen mit dem Überspringen der Deichselkraft über die Gleichgewichtslage verursacht durch die Kupplungsfeder ergibt sich so auf der Druckseite ein markanter Spannungsanstieg, der zur lokalen Plastifizierung führen kann. Dadurch gibt die Deichsel etwas nach, der Biegewinkel vergrößert sich etwas, was die Krümmung erhöht und bei der nächsten Belastung wegen verstärkter Spannungsüberhöhung noch günstigere Bedingungen für das Plastifizieren schafft. Das kann dann durch mehrmalige Bremsvorgänge bei immer niedrigeren Kraftamplituden geschehen, was schließlich zum Versagen der Deichsel führen kann. Die stückweise erfolgenden Erhöhungen des Krümmungsradius sind dabei vermutlich recht klein und sind somit auch bei Sichtkontrolle nicht leicht wahrnehmbar. Daher besteht die Gefahr eines plötzlichen und unerwarteten Versagens.

Da die verwendete Deichsel bereits im unbelasteten Zustand eine elliptische Verformung des Querschnitts zeigte, die durch einen nicht optimalen Biegevorgang bei der Herstellung verursacht war, wurde die damit verbundene Beeinträchtigung der Deichselstabilität abgeschätzt. Ein Vergleich der Widerstandsmomente gegen Biegung zwischen Kreisringquerschnitt und elliptisch verformtem Querschnitt ergab  $770 \text{ mm}^3$  für den Idealfall und  $607 \text{ mm}^3$  für den elliptisch verformten Fall (bei einem Halbachsenverhältnis von  $13.75/10 \text{ mm}$ ). Dadurch ergibt sich eine um 26% höhere Biegespannung, die allerdings in der Rechnung nicht berücksichtigt wurde, wo sich wie gezeigt bereits mit dem sichereren Kreisringquerschnitt plastisches Verhalten ergab. Die Rechenergebnisse würden also für elliptischen Querschnitt noch deutlicher auf Plastifizierung hinweisen.

Zum anderen wurden die Testfahrten nur mit 75% der Nennlast durchgeführt, weshalb sich bei Vollast die Gesamtmasse um 22,5 % erhöht und man eine entsprechende Vergrößerung der Bremskraft und damit auch der kritischen Biegespannung erwarten kann. Zudem sind bei modernen Fahrrädern Bremsverzögerungen von über  $5 \text{ m/s}^2$  möglich, was zu einer weiteren Erhöhung der Bremskraft und entsprechend höheren Deichselbelastungen führen würde. Zur Entschärfung der Situation trägt bei, dass das Biegemoment bei der um den Messaufnehmer verkürzten Deichsel tatsächlich geringer ist und dass die Plastifizierung der Randzone zunächst noch kein Versagen, sondern sogar eine Traglasterrhöhung bewirken kann (s. N. Dimitrov, Festigkeitslehre I, Berlin 1971, S.160), was für gerade Träger auch als plastische Reserve bezeichnet wird. Bei der starken funktionsbedingten Vorkrümmung der Deichsel kann die wiederholte Plastifizierung aber eine sukzessiven Erhöhung des Krümmungswinkels bewirken, die das Plastifizieren wegen der dann weiter zunehmenden Spannungsüberhöhung auf der Druckseite immer mehr erleichtert und so schließlich zum katastrophalen Versagen bei geringer Belastung führen kann.

Zusammenfassend ergibt sich daher aus den durchgeführten Untersuchungen, dass die verwendete Auslegung der Deichsel mit 25 mm Durchmesser und 2 mm Wandstärke und Werkstoff AlMgSi05 wohl nicht als betriebssicher angesehen werden kann. Bereits bei nur 75%iger Beladung wird schon der Bereich der Streckgrenze von  $150 - 160 \text{ N/mm}^2$  in etwa erreicht, so dass keinerlei Sicherheitsbeiwert vorhanden ist. Dementsprechend wird zuvor schon die viel niedrigere zulässige Spannung für die Biegeweichfestigkeit, die für EN AW-6060 bei etwa  $70 \text{ N/mm}^2$  liegt, deutlich überschritten (s. z.B. Thomas Senkel, Aluminium im Bau von Leichtfahrzeugen, <http://www.forschungsbuero.de/html/werkstoffe.htm>).

## 6 Verbesserungsvorschläge

Als Abhilfemaßnahmen bieten sich die folgenden Dinge an

1. Einziehen eines Drahtseils in die Deichsel. Das kann zwar das Auftreten eines Schadens nicht verhindern, vermeidet aber zumindest ein unkontrolliertes komplettes Abreißen der Deichsel mit unkontrollierter Entfernung des Hängers vom Rad, wodurch Folgeunfälle mit anderen Verkehrsteilnehmern verursacht werden könnten.
2. Austausch der Deichsel durch eine modifizierte Bauvariante mit erhöhter Wandstärke oder andere Werkstoffauswahl mit höherer Festigkeit (z.B. AlMgSi1 (EN AW- 6082) mit einer Streckgrenze von etwa 240 N/mm<sup>2</sup>).
3. Reduktion des Überschwingens durch anderes Kupplungssystem oder Einbau geeigneter Dämpfungselemente.
4. Einbau einer Querstrebe in die erste Krümmung. Dadurch wird die Krümmung ausgesteift und ein Abknicken zuverlässig verhindert.
5. Reduktion der Krümmungsradien der Biegungen soweit das im Hinblick auf die Manövrierfähigkeit beim Rangieren möglich ist.

Die 4. Maßnahme (Einbau einer Querstrebe) kann mit wenig Aufwand durchgeführt werden, um die Sicherheit einer bestehenden Deichsel ohne Neuanfertigung und Tausch zu verbessern .

In Abb. 24 sind zwei mögliche Ausführungsweisen mittels Alu-U-Profil bzw. mittels eines Spannschlusses M6 gezeigt. Die Spannschlussmethode ist sehr günstig und einfach durchzuführen. Man benötigt zusätzlich noch eine Mutter M6 plus Federring und zwei Senkkopfschrauben M6x40. Die Ringschraube am Spannschloss mit Linksgewinde schraubt man zur Fixierung bis ganz zum Anschlag hinein. Mit der anderen Rechtsgewinde-Ringschraube stellt man die gewünschte Länge ein und fixiert die dann mit Mutter und Federring. Dann befestigt man die derart entstandene Verstrebung mit zwei Senkkopfschrauben an der Deichsel. Dadurch kann ein Knicken bei den betrachteten Bremskräften zuverlässig vermieden werden.



Abb. 24: Aussteifung der ersten Deichselbiegung mit Alu-U-Profil 2 mm (links) und Spannschloss M6 ( rechts).

## Anhang

### Anhang I: Matlab/Octave -Programm für das Zweikörpermodell

```
function bremsen()

global m1 m2 ;
global c1 c2;
global w ;
global a d l;

m1=90.;           % Masse Zugrad + Fahrer           [kg]
m2=44.4;         % Masse Anhänger                 [kg]

c1=53000.;       % Steifigkeit (Federkonstante) Deichsel [N/m] (zur Vernachlässigung sehr groß wählen)
c2=20000.;       % Steifigkeit Kupplungsfeder       [N/m] (typischer Wert: 5000 N/m)
c=(c1*c2)/(c1+c2); % Federkonstante Reihenschaltung         [N/m]

l=1.00;          % Abstand Rad / Hänger (Deichsellänge) [m]
a=5.;           % Bremsverzögerung                 [m/s**2]
d=200.;         % Dämpfungskonstante (angenommen)    [Ns/m] (typischer Wert 66 Ns/m)

wkmh=25.;        % Geschwindigkeit                 [km/h]
w=wkmh/3.6;     % Umrechnung in m/s                   [m/s]

% Anfangsbedingungen

z0=zeros(4,1);
z0(1)=0.;
z0(2)=-1;
z0(3)=w;
z0(4)=w;

% Zeitinformationen

tend=5;
nts=1000;
dt=tend/nts;
tsta=0;
t=linspace(tsta,tend,nts);

% Löser %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
z=lsode("f",z0,t);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Abspeichern der Resultate als 1d-Felder für Plots

for its=1:nts

    tp(its)=t(its);

    x1p(its)=z(its,1);
    x2p(its)=z(its,2);
    u1p(its)=z(its,3);
    u2p(its)=z(its,4);

    x1=z(its,1);
    x2=z(its,2);
```

```

dx(its)=x1-x2-l;
force(its)=c*dx(its);
force1(its)=c*dx(its)+d*(u1p(its)-u2p(its));

```

```
end
```

```
fig_h=figure;
```

```
% 1. Diagramm machen
```

```
subplot(2,2,1);
```

```
plot(tp,u1p,"r");
hold on;
plot(tp,u2p,"g");
grid on;
```

```
auxvec=[min(u1p),min(u2p)];
axmin=min(auxvec);
auxvec=[max(u1p),max(u2p)];
axmax=max(auxvec);
axis([0.,tend, axmin,axmax]);
```

```
xlabel('Zeit / [s]');
ylabel('Geschwindigkeiten / [m/s]');
legend('u1 (Rad)', 'u2 (Haenger)');
title('Bremsvorgang Rad + Anhaenger');
```

```
% 2. Diagramm
```

```
subplot(2,2,2);
```

```
plot(tp,x1p,"r");
hold on;
plot(tp,x2p,"g");
grid on;
```

```
auxvec=[min(x1p),min(x2p)];
axmin=min(auxvec);
auxvec=[max(x1p),max(x2p)];
axmax=max(auxvec);
axis([0.,tend, axmin,axmax*1.1]);
```

```
xlabel('Zeit / [s]');
ylabel('Weg / [m]');
legend('x1 (Rad)', 'x2 (Haenger)', 'location','southeast');
```

```
% 3. Diagramm
```

```
subplot(2,2,3);
```

```
plot(tp,force,"r");
hold on;
plot(tp,force1,"g");
grid on;
```

```
% axis([0.,tend+1.5, -50,50]);
```

```
xlabel('Zeit / [s]');
ylabel('Kraft / [N]');
legend('Federkraft', 'Deichselkraft');
```

```
% 4. Diagramm
```

```

subplot(2,2,4);
plot(tp,dx*1000,"r");
hold on;
grid on;

axis([0.,tend, -100,50]);
xlabel ('Zeit / [s]');
ylabel ('Wegdiff. / [mm]');
legend ('Weg: x1 (Rad)- x2 (Haenger)');

print(fig_h, "c_20000_d_200.jpg", "-djpg");

endfunction;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [xdot]=f(z,t)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% provides right hand side for ODE system

global w;
global m1 m2;
global c1 c2;
global a d l;

c=(c1*c2)/(c1+c2);

% initialize xdot

x1=z(1);
x2=z(2);
u1=z(3);
u2=z(4);

xdot(1)=u1;
xdot(2)=u2;
xdot(3)=-c/m1*x1+c/m1*x2-a*(1.+m2/m1)-d/m1*u1+d/m1*u2 + c/m1*l;
if(u1<0); xdot(3)=0.; end
xdot(4)=c/m2*x1-c/m2*x2 +d/m2*u1-d/m2*u2 -c/m2*l;

endfunction

```

Anhang II: Berechnung des Spannungsverlaufs im kritischen Querschnitt

Spannungsverteilung im gekrümmten Träger

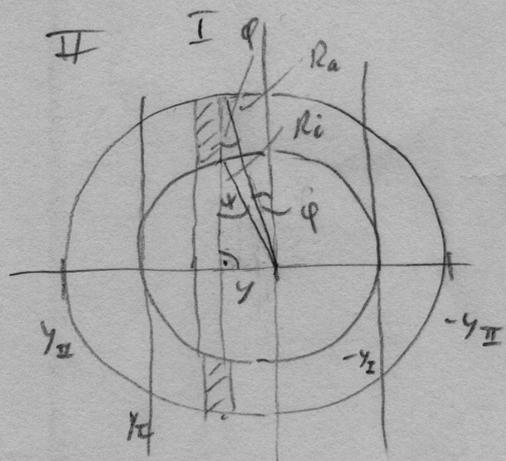
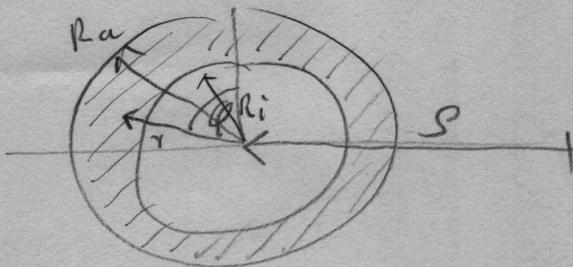
(nach Baurert, Techn. Mechanik, S. 309)

$$\sigma(y) = \frac{F_N}{A} + \frac{M_b}{SA} \left( 1 + \frac{1}{\kappa} \frac{y}{\rho+y} \right) \quad \text{mit Formfaktoren}$$

$$\kappa = - \frac{1}{A} \int \frac{y}{\rho+y} dA$$

unterschiedliche Querschnitte:  
 Lastfall „Bremser“: 1. Biegung  
 Lastfall „Rechtskurve“: 2. Biegung  
 (siehe unten)

für Rohrquerschnitt



$$dA = 2(R_a \cos \varphi - R_i \cos \psi) dy$$

$$y = R_a \sin \varphi$$

$$dy = R_a \cos \varphi \cdot d\varphi$$

$$\kappa = - \frac{1}{A} \left[ \int_{y_I}^{y_{II}} + \int_{-y_I}^{-y_{II}} + \int_{-y_I}^{-y_{II}} \right] = - \frac{1}{A} [I_1 + I_2 + I_3]$$

$$\text{mit } A = \pi (R_a^2 - R_i^2)$$

$$R_i \sin \psi = R_a \sin \varphi$$

$$\sin \psi = \frac{R_a}{R_i} \sin \varphi$$

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \left( \frac{R_a}{R_i} \right)^2 \sin^2 \varphi}$$

$$y_I = R_a \sin \varphi_I$$

$$\varphi_I = \arcsin \left( \frac{y_I}{R_a} \right)$$

$$\varphi_{II} = \frac{\pi}{2}$$

(7)

$$\bar{I}_1 = \int_{\gamma_I}^{\gamma_{II}} \frac{2 \cdot R_a^3 \cdot \sin \varphi \cos^2 \varphi}{(s + R_a \sin \varphi)} d\varphi$$

$$\bar{I}_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arcsin\left(\frac{\gamma_I}{R_a}\right)} \frac{2 R_a^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{(s + R_a \sin \varphi)} d\varphi$$

$$\bar{I}_2 = \int_{-\arcsin\left(\frac{\gamma_I}{R_a}\right)}^{\arcsin\left(\frac{\gamma_I}{R_a}\right)} \frac{2 R_a^2 \sin \varphi \cos \varphi (R_a \cos \varphi - R_i \sqrt{1 - \left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2 \sin^2 \varphi})}{(s + R_a \sin \varphi)} d\varphi$$

### Anhang III: Matlab/Octave -Code zur Integration der Schnittgrößen entlang der Deichsel und zur Berechnung der Spannungsverteilung im kritischen Querschnitt

```
function spandei()

global S1 S2;
global phi1 phi2;
global R1 R2;
global s;

% Geometriedaten

S1=0.47;
S2=0.33;
S3=0.20;
R1=0.04
R2=0.04;

phi1=(180.-103.)*pi/180.;
phi2=(180.-148.)*pi/180.;

B1=R1*phi1;
B2=R2*phi2;
SG=S1+B1+S2+B2+S3

F1=225.;

% Lastfall 1 Bremsen

N0(1)=F1;
Q0(1)=F1;
M0(1)=0.;

% Lastfall 2 Linkskurve

N0(2)=F1*0.95;
Q0(2)=-F1*0.95;
M0(2)=0.;

% Lastfall 3 Rechtskurve

N0(3)=-F1*0.95;
Q0(3)=F1*0.95;
M0(3)=0.;

% Lastfall 3 Beschleunigen

N0(4)=-F1;
Q0(4)=-F1;
M0(4)=0.;

for j1=1:4

% Anfangsbedingungen

z0=zeros(3,1);

z0(1)=N0(j1);
z0(2)=Q0(j1);
```

```

z0(3)=M0(j1);

zneu=z0;

% Diskretisierung

nts=1000;

sen=SG;
sta=0;
ds=(sen-sta)/nts;
s=SG;

its=0;

% Runge-Kutta 4. Ordn. Löser

for its=1:nts
s=its*ds;

z0s=f(z0,s);
za=z0+ds/2.*z0s;
zas=f(za,s+ds/2.);
zb=z0+ds/2.*zas;
zbs=f(zb,s+ds/2.);
zc=z0+ds*zbs;
zcs=f(zc,s+ds);

zneu=z0+ds/6.*(z0s+2.*(zas+zbs)+zcs);

for k=1:3
z(its,k)=zneu(k);
end

ort(its)=s;
z0=zneu;

end

for its=1:nts

n(its,j1)=z(its,1);
q(its,j1)=z(its,2);
m(its,j1)=z(its,3);

end

end

% Spannungsverlauf

ra=0.0125;
ri=0.0105;
%ra=0.0140;
%ri=0.0110;

y1=ri;
alp1=asin(y1/ra)

```

```

alp2=pi/2.
ny=10000;

% Teilintegral 1

da=(alp2-alp1)/ny;
int1=0.;
alp=alp1;

for iy=1:ny
    alp=alp+da;
    dint1=2.*ra^3*sin(alp)*cos(alp)*cos(alp)/(R1+ra*sin(alp));
    int1=int1+dint1*da;
end

% Teilintegral 2

da=2*alp1/ny;
int2=0.;
alp=-alp1;

for iy=1:ny
    alp=alp+da;
    dint2=2.*ra^2*sin(alp)*cos(alp)*(ra*cos(alp)-ri*sqrt(1.-(ra/ri*sin(alp))^2))/(R1+ra*sin(alp));
    int2=int2+dint2*da ;
end

% Teilintegral 3

da=(-alp1+alp2)/ny;
int3=0.;
alp=-alp2;

for iy=1:ny
    alp=alp+da;
    dint3=2.*ra^3*sin(alp)*cos(alp)*cos(alp)/(R1+ra*sin(alp));
    int3=int3+dint3*da;
end

% Formfaktor kappa

aring=pi*(ra^2-ri^2);
kappa=-1./aring*(int1+int2+int3)

% Spannungsverteilung Rechtskurve Max. bei 2. Biegung

nor=280.;
mom=100.;

y=-ra;
dy=2*ra/ny;

ixx=pi/4*(ra^4-ri^4);

for iy=1:ny
    y=y+dy;
    sig(iy) = (nor/aring+mom/R1/aring*(1+y/kappa/(R1+y)))/1.e06;
    sig1(iy)= (nor/aring+mom/ixx*y)/1.e06;
    sig2(iy)= nor/aring/1.e06;
end

```

```

yp(iy)=y;
end

% Spannungsverteilung Bremsen Max. bei 1. Biegung

nor=225.;
mom=110.;

y=-ra;
dy=2*ra/ny;

ixx=pi/4*(ra^4-ri^4);

for iy=1:ny
y=y+dy;
sigb(iy) = (nor/aring+mom/R1/aring*(1+y/kappa/(R1+y)))/1.e06;
sigb1(iy)= (nor/aring+mom/ixx*y)/1.e06;
sigb2(iy)= nor/aring/1.e06;
yp(iy)=y;
end

% 1. Diagramm (es wird nur der Lastfall 'Bremsen' dargestellt)

fig1_h=figure(1);

col(1)='r';
col(2)='g';
col(3)='b';
col(4)='m';

j1=1

for its=1:nts
np(its)=n(its,j1);
qp(its)=q(its,j1)*0.99;
mp(its)=m(its,j1);
end

plot(ort,np,col(1));
hold on;
grid on;
plot(ort,qp,col(2));
plot(ort,mp,col(3));
axis([0.,SG*1.1, -200., 400.]);
xlabel ('Koord. entlang Deichel / [m]');
ylabel ('Normal- und Querkraft / [N], Biegemoment / [Nm]');
legend ('Normalkraft', 'Querkraft','Biegemoment' );
title('2mm-Deichselrohr: Normalkraft, Querkraft, Momentenverlauf');

print(fig1_h, "kraft_mom.jpg", "-djpg");

% 2. Diagramm (es wird nur der Lastfall 'Bremsen' dargestellt)

fig2_h=figure(2);
plot(yp,sigb,"b");
hold on;
plot(yp,sigb1,"g");
hold on;
plot(yp,sigb2,"r");
grid on;

```

```

xlabel ('y-Koord. in Biegerichtung / [m]');
ylabel ('Biegespannung,[N/m²]');
% axis([-ra,ra, min(sigb)-30, max(sigb)+30]);
legend ('1. Biegung','Ohne Krümmung','Nullinie');
axis([-ra,ra*2., -200,150]);
title('2mm-Deichselrohr: Biegespannung im krit. Querschnitt');

print(fig2_h, "krit_spann.jpg", "-djpg");

endfunction;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [xdot]=f(z,s)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% provides right hand side for ODE system
global S1 S2;
global phi1 phi2;
global R1 R2;
global s;

% initialize xdot

xdot=zeros(3,1);
N=z(1);
Q=z(2);
M=z(3);

if(s>=0 & s<S1)
    R=1.e20 ;
elseif (s>=S1 & s < S1+R1*phi1)
    R=-R1;
elseif (s>=S1+R1*phi1 & s<S1+S2+R1*phi1)
    R=1.e20;
elseif (s>=S1+S2+R1*phi1 & s<S1+S2+R1*phi1+R2*phi2)
    R=R2;
else
    R=1.e20;
end

xdot(1)=-Q/R;
xdot(2)= N/R;
xdot(3)=Q;

endfunction

```